



Modélisation numérique de la thermohydraulique d'une coulée semi-continue de plaques d'aluminium

Christian Raffourt

► To cite this version:

Christian Raffourt. Modélisation numérique de la thermohydraulique d'une coulée semi-continue de plaques d'aluminium. Electromagnétisme. INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, 1991. Français. NNT: . tel-01340656

HAL Id: tel-01340656

<https://hal.science/tel-01340656>

Submitted on 1 Jul 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée par

Christian RAFFOURT

Pour obtenir le titre de DOCTEUR

**de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE
GRENOBLE**

(Arrêté ministériel du 23 novembre 1988)

Spécialité : Mécanique

Modélisation numérique de la thermohydraulique d'une coulée semi-continue de plaques d'aluminium

Date de soutenance : 19 novembre 1991

Composition du jury :

M.	S.	BERCOVICI	Président
M.	J.P.	CHOLLET	Rapporteurs
Mme	Ch.	BENARD	
M.	M.	RAPPAZ	Examineurs
M.	Y.	FAUTRELLE	

Thèse préparée au sein du laboratoire MADYLAM

Monsieur le Professeur Y. Fautrelle a dirigé cette étude de façon très fructueuse. Je le remercie sincèrement de son soutien et de ses encouragements.

Monsieur Bercovici m'a fait l'honneur de présider le jury de la thèse, je l'en remercie vivement.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur le Professeur J. P. Chollet et à Madame Ch. Benard pour avoir accepté d'agir en qualité de rapporteurs extérieurs et de participer au jury de thèse.

Je remercie également Monsieur le Professeur Rappaz pour avoir bien voulu faire partie du jury.

Je tiens aussi à remercier J.L. Meyer et B. Hannard pour les conseils qu'ils m'ont prodigués tout au long de cette étude.

J'adresse également mes remerciements à Monsieur Y. Duterrail pour la disponibilité dont il a fait preuve à mon égard.

J'associe à mes remerciements Mademoiselle L. Canaux qui a assuré la dactylographie de ce document.

SOMMAIRE

SOMMAIRE

<u>REMERCIEMENTS</u>	3
<u>SOMMAIRE</u>	5
<u>CHAPITRE I</u> GENERALITES ET PRESENTATION DU PROBLEME	13
I.1 COULEE SEMI-CONTINUE DE PLAQUES D'ALUMINIUM	15
I.1.1 Principe général	15
I.1.2 Les problèmes et leurs origines	17
I.1.3 Les différents types d'injecteurs	17
I.2 LES OBJECTIFS	21
I.3 LES PHENOMENES PHYSIQUES MIS EN JEU ET LEUR IMPORTANCE	23
I.3.1 Solidification	23
I.3.2 Phénomènes purement hydrauliques	24
I.3.3 Phénomènes purement thermiques	25
I.3.4 Phénomènes thermo-hydrauliques	31
I.4 TRAVAUX ANTERIEURS	34
 <u>CHAPITRE II</u> MODELES PHYSIQUES	 37
II.1 EQUATIONS DE BASE	39
II.2 FORCES DE VOLUME	40
II.3 MODELE k-ϵ	41
II.3.1 - Présentation du problème	41
II.3.2 - Energie cinétique de la turbulence k	42
II.3.3 - Taux de dissipation de la turbulence ϵ	43
II.3.4 - Modèle de viscosité turbulente ν_t	43
II.3.5 - Modèle de conductivité thermique turbulente α_t	45
II.4 LOI DE COUCHES LIMITES HYDRAULIQUES	45
II.4.1 - Profil de vitesse	45
II.4.2 - Comportement des variables k et ϵ dans la couche limite	47
II.4.3 - Formulation pratique	48
II.5 LOI DE COUCHES LIMITES THERMIQUES	49
II.5.1 - Profil de température	49
II.5.2 - Formulation pratique	51
II.6 LOI DE POROSITE	51

CHAPITRE III	LE CODE DE CALCUL	53
III.1	EQUATIONS A RESOUDRE	55
III.1.1	Equations en coordonnées cartésiennes	55
III.1.2	Coordonnées curvilignes orthogonales	57
III.1.3	Equations en coordonnées curvilignes orthogonales	59
III.2	ALGORITHME SIMPLE	60
III.3	METHODE DES VOLUMES FINIS	61
III.4	GRILLES DE DECOUPAGE	62
III.4.1	Grille principale	62
III.4.2	Grilles décalées	63
III.4.3	Numérotations	63
III.4.4	Grille géométrique	65
III.4.5	Définition des régions surfaciques	65
III.4.6	Traitement des régions surfaciques	67
III.4.7	Notations	69
III.5	SCHEMA DE DISCRETISATION	70
III.6	OPERATEURS DE CALCUL	72
III.6.1	Dérivation	72
III.6.2	Intégration	73
III.6.3	Interpolation	73
III.7	DISCRETISATION DU SYSTEME DIFFERENTIEL	74
III.7.1	Equation de transport	74
III.7.2	Traitement de la pression	76
III.7.3	Conditions aux limites et obstacles internes	78
III.8	PROGRAMMATION	79
III.8.1	Généralités	79
III.8.2	Structure de données et architecture du code	81
III.8.3	Temps de calcul	83
III.9	VALIDATION	83
III.10	CRITIQUES	85
III.10.1	Transformation curviligne	85
III.10.2	Structure de l'information	86
CHAPITRE IV	MESURE DU COEFFICIENT DE PERTE DE CHARGE HYDRAULIQUE	89
IV.1	GENERALITES	91
IV.2	PARAMETRES DE L'ECOULEMENT	92
IV.3	PLAGE D'ETUDE	92
IV.3.1	Paramètre lié au métal liquide	93

IV.3.2	Paramètres liés au tissu	93
IV.3.3	Paramètre du débit	93
IV.3.4	Récapitulatif	93
IV.4	ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE	95
IV.4.1	Résultats expérimentaux	95
IV.4.2	Modèle à pores cylindriques	95
IV.5	PRINCIPE EXPERIMENTAL	95
IV.6	DESCRIPTION DE L'INSTALLATION	99
IV.7	RESULTATS	100
IV.7.1	Tissu Pon 650	100
IV.7.2	Tissu Pon 618	101
IV.8	CONCLUSION PARTIELLE	101

CHAPITRE V ANALYSE DES RESULTATS NUMERIQUES, CONFRONTATION A LA COULEE EXPERIMENTALE

V.1	PRELIMINAIRES	107
V.2	CONFIGURATION GENERALE DE MODELISATION	107
V.2.1	Géométrie	107
V.2.2	Paramètres de coulée	109
V.2.3	Modèles de calcul	110
V.2.4	Conditions aux limites	110
V.3	SINGLE-BAG	111
V.3.1	Simplification maximale	111
V.3.2	Convection naturelle	112
V.3.3	Approche curviligne	112
V.3.4	Panier excentré	114
V.4	COMBO-BAG	115
V.5	COULEE EN CHARGE	117
V.6	INFLUENCE DES DIMENSIONS DE L'INJECTEUR	117
V.7	BILAN	117

CONCLUSION 147

BIBLIOGRAPHIE 149

ANNEXES 159

AI FORMULATION DU TERME SOURCE DES COMPOSANTES DE LA VITESSE EN

COORDONNEES CURVILIGNES	161
AII DISCRETISATION DES EQUATIONS	163
AII.1 PRINCIPE	163
AII.2 INTEGRATION DE L'OPERATEUR DIVERGENCE	163
AII.3 TERME DE DIFFUSION	163
AII.4 TERME DE CONVECTION	164
AII.5 TERME SOURCE ET TERMES SPECIAUX	165
AIII DISCRETISATION DES CONDITIONS AUX LIMITES ET DES OBSTACLES INTERNES	167
AIII.1 SITUATIONS TOPOLOGIQUES SIMPLES	167
AIII.1.1 Traitements généraux	167
AIII.1.2 Traitement simples des modèles de C.L. et O.I. hydrauliques	171
AIII.1.3 Traitements simples des C.L. thermiques	173
AIII.2 SITUATIONS TOPOLOGIQUES HYBRIDES	175
AIII.2.1 Hybrides à un modèle	175
AIII.2.2 Hybrides à deux modèles	178
RESUME	181

<p>CHAPITRE I Généralités et présentation du problème</p>
--

CHAPITRE I

Généralités et présentation du problème

I.1 COULEE SEMI-CONTINUE DE PLAQUES D'ALUMINIUM

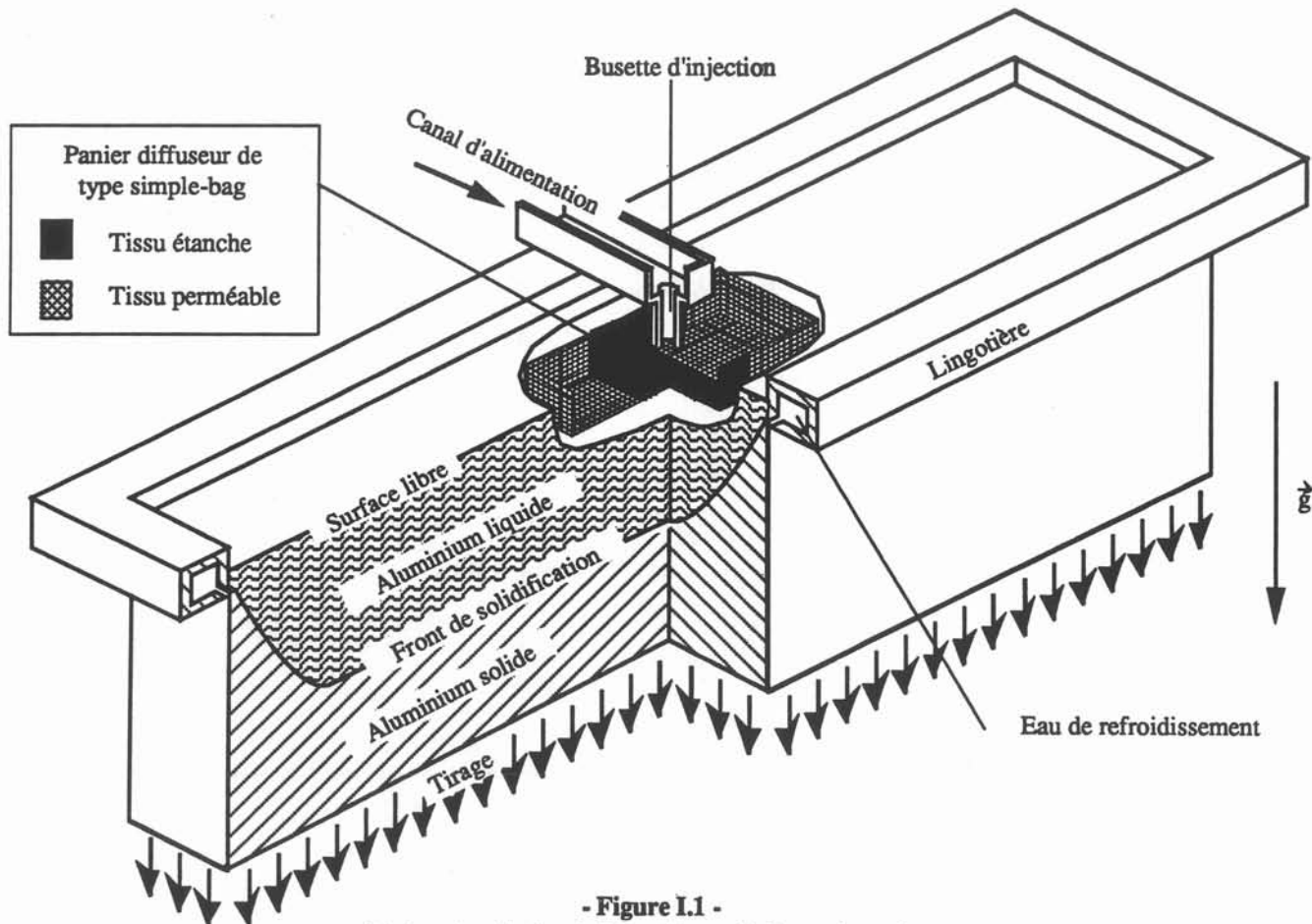
Les tôles d'alliages d'aluminium sont réalisées par laminage de plaques. Ces plaques de section rectangulaire ont quelques dizaines de centimètres d'épaisseur pour des largeurs de un à deux mètres et des hauteurs de quatre à cinq mètres. Elles sont généralement obtenues en coulée verticale semi-continue. Ce procédé est actuellement opérationnel, néanmoins la coulée de plaques de grands formats demeure encore mal maîtrisée. L'enjeu économique est important car les grandes plaques permettent de réaliser des gains notables de productivité.

I.1.1 Principe général

En coulée verticale (figure I.1), les forces de pesanteur assurent le tirage du produit vers le bas. L'apport en métal liquide doit être réalisé par le haut de la plaque en cours d'élaboration. Actuellement, il existe différents dispositifs d'alimentation, leurs descriptions sont données aux paragraphes 1.3 de ce chapitre.

Dans tous les cas, le refroidissement du métal est assuré par un jet d'eau à la surface de la plaque coulée. L'alimentation en eau est réalisée grâce à une lingotière creuse de forme rectangulaire. Les dimensions de la section de la plaque sont données par celles de la lingotière. Le métal est ainsi suffisamment refroidi en surface pour se solidifier jusqu'au coeur du produit.

La forme de l'interface liquide-solide aussi appelée front de solidification résulte de la compétition des échanges thermiques dans chaque phase et de la libération de chaleur au cours du changement d'état. La zone liquide au dessus du front de solidification qui est peu profonde, est appelée marais. Au dessous du front, la zone solide repose sur un fond mobile descendant à faible vitesse. Cette vitesse généralement de l'ordre de 10^{-3} m/s est appelée vitesse de tirage.



- Figure I.1 -
Schéma de principe de la coulée verticale semi-continue
traditionnelle de plaques d'aluminium avec un panier diffuseur
de type "simple-bag".

Bien entendu il y a une phase de démarrage et une phase de fin de coulée. Nous ne nous sommes pas intéressés à ces régimes transitoires, au profit de la phase de régime établi.

I.1.2 Les problèmes et leurs origines

La qualité des tôles d'alliage d'aluminium est fortement liée à l'histoire de la solidification de la plaque en coulée. En effet, dans les "zones froides" du marais même éloignées du front de solidification, il peut y avoir apparition de germes solides ce qui entraîne la ségrégation des composants de l'alliage et finalement des contraintes résiduelles dans le matériau solide. Ce sont ces contraintes qui sont à l'origine de défauts du produit final.

La répartition thermique dans le marais liquide et par conséquent la thermo-hydraulique sont donc déterminantes quant à la qualité des plaques.

Finalement, les vitesses d'écoulement du métal liquide apparaissent comme les paramètres clés du problème. Celles-ci sont engendrées à la fois par le dispositif d'injection et la thermo-convection ; elles peuvent être modifiées par la présence de grains en suspension ou en sédimentation dans les zones de surfusion.

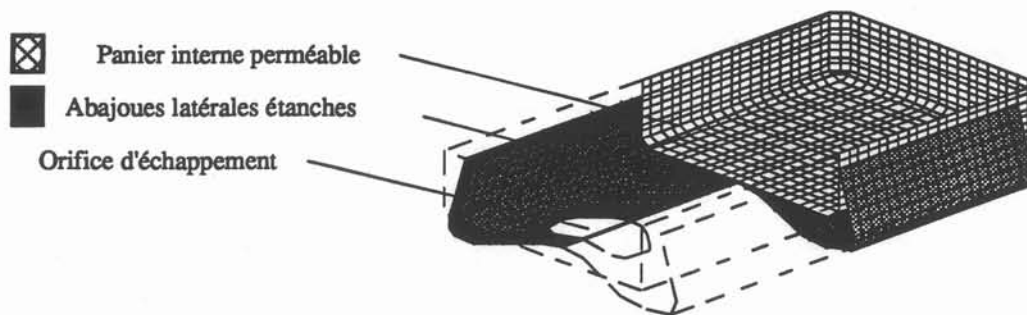
Plus particulièrement, pour les produits rectangulaires de très grande largeur ou de très faible épaisseur, les risques d'inhomogénéité thermique sont très importants. Pour ces plaques présentant un intérêt économique accru le dispositif d'alimentation et de répartition du métal liquide dans le marais doit être conçu avec le plus grand soin.

I.1.3 Les différents types d'injecteurs

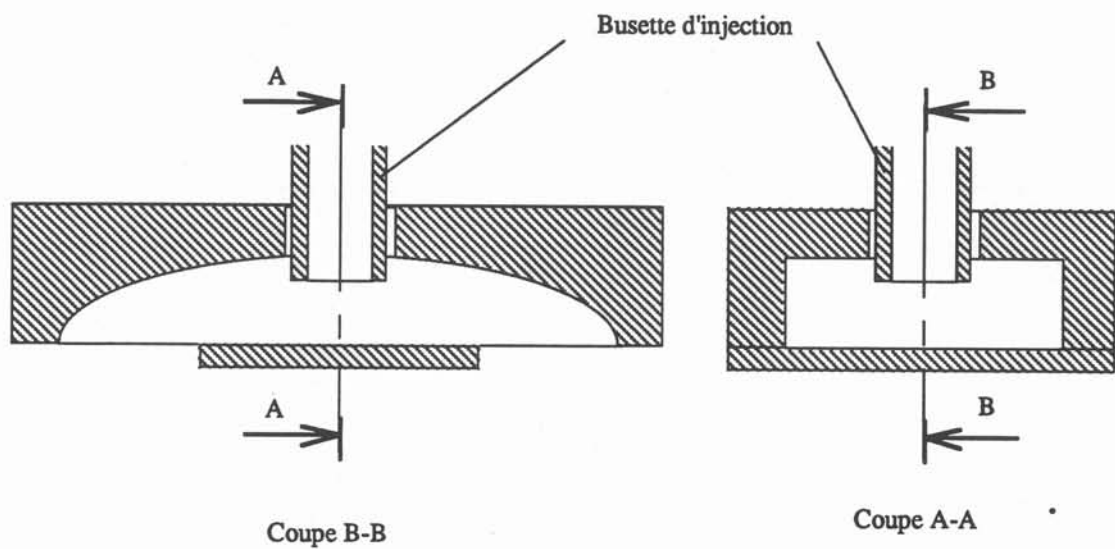
Le procédé n'étant pas optimum, pour l'améliorer, les métallurgistes ont imaginé plusieurs systèmes permettant l'alimentation en métal liquide des coulées de plaques. Quatre de ces dispositifs sont détaillés dans ce paragraphe.

a - Injection par panier filtre

Ce procédé (figure I.1), le plus fréquemment utilisé, consiste à amener l'aluminium liquide au-dessus de la plaque par un canal horizontal se dévidant au centre du marais au moyen d'une busette. L'extrémité de la busette de section



- Figure I.2 -
Panier diffuseur de type "combo-bag".



- Figure I.3 -
Schéma du flotteur.

circulaire, d'un diamètre de 5 à 10 cm peut être plus ou moins immergée dans le métal liquide. Ainsi l'aluminium est injecté verticalement, et pour éviter que le flot de métal chaud percute trop violemment le front froid de solidification, on positionne un panier filtre au débouché de la busette. Les paniers, en grande partie immergés pendant la coulée, sont constitués de tissus de fibres de verre plus ou moins perméables voire même totalement étanches, ils ont pour rôle l'homogénéisation du champ thermique grâce à l'amélioration de la répartition des flux hydrauliques.

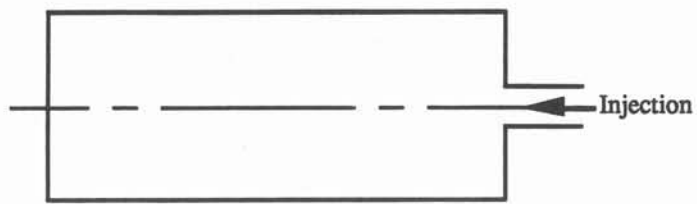
Nous présentons deux types de paniers actuellement utilisés :

- le "simple-bag" (figure I.1). C'est le plus simple, de forme parallélépipédique, il est fait de tissu perméable avec dans sa partie centrale un renforcement de tissu étanche sur lequel le jet chaud de métal liquide vient s'écraser.

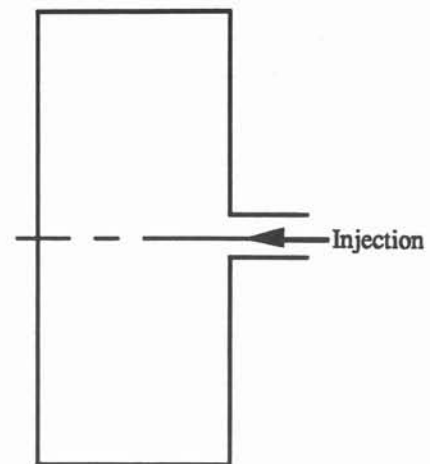
- le "combo-bag" (figure I.2) est le plus utilisé, d'une forme beaucoup plus complexe que le précédent. Il est constitué d'un panier intérieur allongé qui est recouvert latéralement par des abajoues de tissu-étanche présentant deux orifices orientés vers le bas.

b - Injection par flotteur

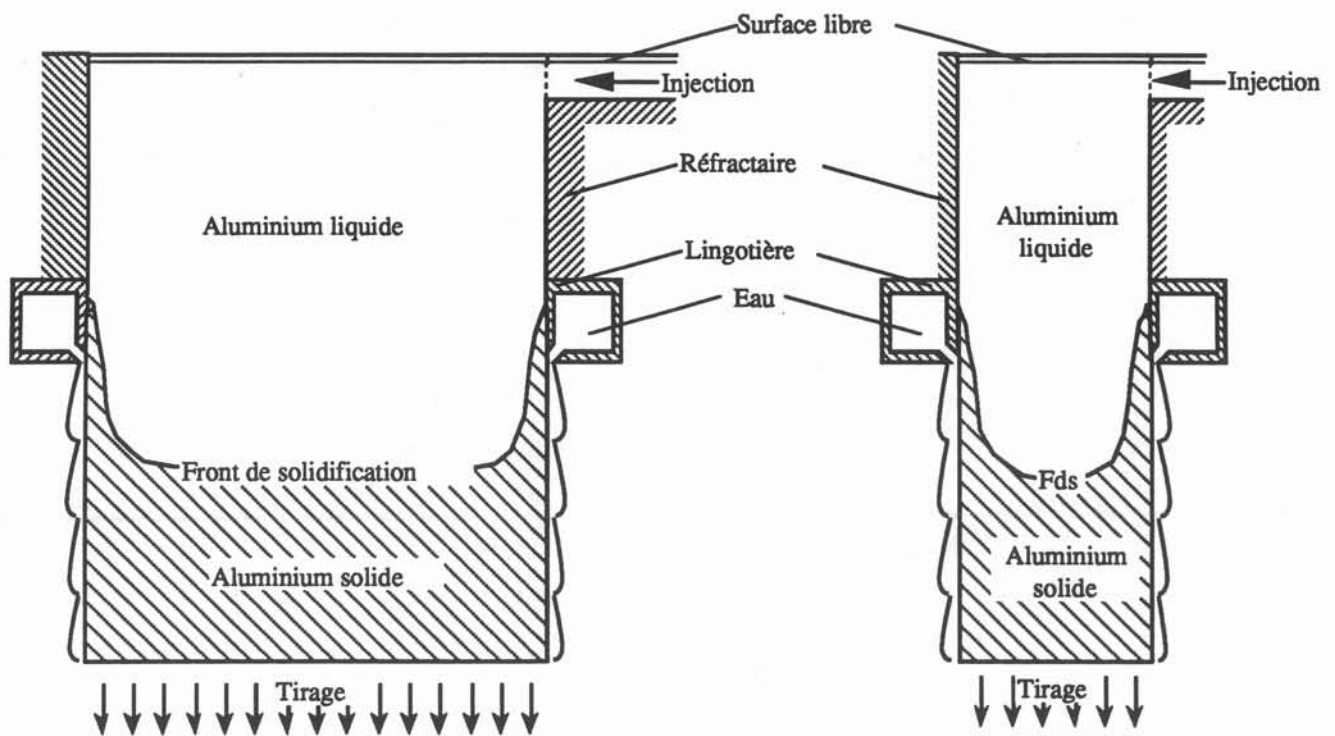
Comme pour le système présenté au paragraphe précédent, le métal est amené au centre du marais par un canal et une busette. A l'extrémité de celle-ci, un "flotteur" de matière réfractaire collecte le liquide. La forme du flotteur (figure I.3) est telle que l'alimentation est symétriquement scindée et défectée en deux jets horizontaux orientés en sens opposés l'un de l'autre et suivant une direction parallèle à la grande dimension de la section de la plaque. Ceci est le rôle principal du flotteur qui assure en outre l'asservissement de l'alimentation en métal liquide. En effet, si le niveau d'aluminium monte dans le marais, le flotteur accompagne ce mouvement jusqu'à l'obstruction de la busette qui est fixe. Inversement, si le niveau baisse, le métal s'échappe aisément de la busette. Ce rôle secondaire n'influençant pas directement la qualité du produit, il ne sera pas plus détaillé dans ce rapport.



(a.1) Surface libre en vue de dessus



(b.1) Surface libre en vue de dessus



(a.2) Section dans le plan de symétrie

(b.2) Section dans le plan de symétrie

- Figure I.4 -

Principe de la coulée en charge:

- (a) injection laterale,
- (b) injection frontale.

c - Coulée en charge

Pour la coulée en charge (figure I.4), un coffre parallélépipédique et adiabatique est posé sur la lingotière. Le canal d'alimentation en métal débouche directement sur la partie haute et généralement au centre d'un des grands côtés du coffre. Durant la coulée, le coffre est donc chargé d'aluminium liquide, d'où l'origine du nom de ce procédé.

Cette installation, contrairement à celles décrites dans les paragraphes précédents, ne présente qu'une seule des deux symétries planaires de la section de la plaque.

d - Fausse charge

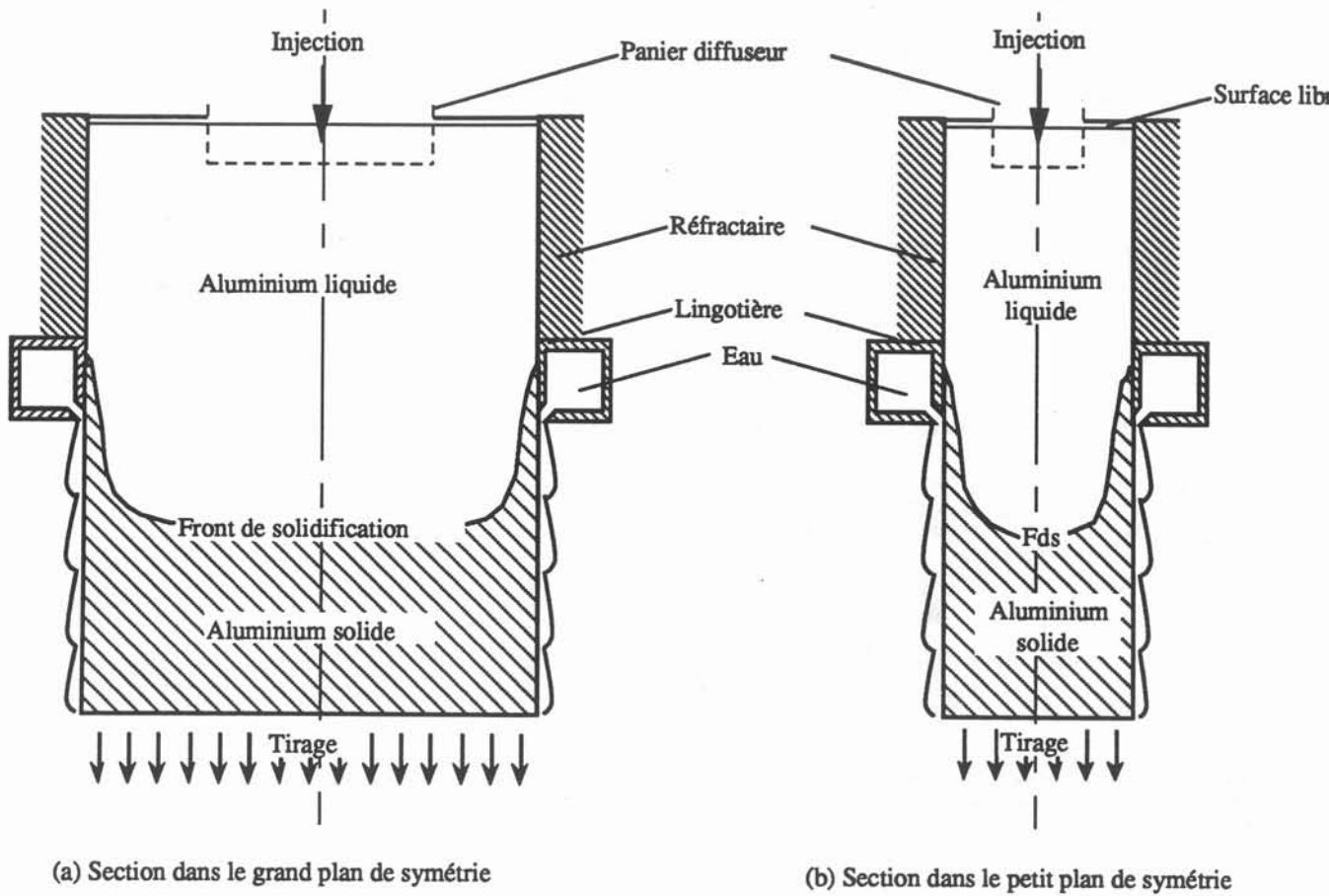
Ce dispositif hybride (figure I.5) utilise le coffre de la coulée en charge avec une injection par panier au centre du marais. Ce dispositif conserve les deux symétries planaires du produit.

I.2 OBJECTIFS

Nous l'avons vu au paragraphe précédent, les dispositifs d'alimentation en aluminium liquide des coulées semi-continues verticales conditionnent notablement la qualité des produits finis.

Cette étude avait pour objectif principal la construction d'un code de calcul permettant la prédiction de la thermohydraulique des coulées. Cela pour mieux comprendre l'influence des différents paramètres de l'alimentation sur le mouvement du fluide dans le marais et finalement sur la solidification.

Compte tenu de l'importance des dispositifs d'injection, nous avons choisi de leur donner la priorité par rapport aux phénomènes liés à la solidification. Le code capable de résoudre les équations stationnaires tridimensionnelles, a donc été conçu pour prendre en compte le plus fidèlement possible les injecteurs. Pour cela, l'architecture du code est conçue pour le rendre suffisamment souple afin de modéliser avec la meilleure exactitude les diverses géométries d'alimentation.



- Figure I.5 -

Principe de la coulée de type
fausse charge

L'analyse des différents phénomènes physiques mis en jeu et leur importance respective sont détaillées au paragraphe suivant, une analyse bibliographique suit. Les termes des équations mathématiques traduisant la physique du procédé sont discutés au chapitre II, le code de calcul résolvant ces équations est présenté au chapitre III.

De plus, afin de tenir compte pour le calcul de la présence éventuelle des paniers, il est important de connaître la loi de comportement de l'écoulement de l'aluminium liquide au travers des divers tissus. Le principe et quelques résultats d'une méthode d'estimation expérimentale de ces lois sont exposés au chapitre IV de ce rapport.

Le chapitre V recueille quelques résultats obtenus numériquement, l'un d'entre eux est comparé aux mesures effectuées sur une coulée en grandeur réelle.

I.3 - LES PHENOMENES PHYSIQUES MIS EN JEU ET LEUR IMPORTANCE

I.3.1 - Solidification

Pour l'aluminium pur, l'interface liquide-solide n'a pas d'épaisseur, elle est hydrauliquement lisse et exactement localisée par la surface isotherme à la température de solidification.

En ce qui concerne les alliages, il existe une zone pâteuse comprise entre les isothermes de liquidus et de solidus. C'est dans cette région où l'alliage libère sa chaleur latente de solidification qu'il se produit des phénomènes de ségrégation des constituants du matériau. Ce sont ces phénomènes qui décident du type de solidification colonnaire ou équiaxe (cf. /I.1/).

Dans le cadre de cette étude, comme il a déjà été spécifié, nous ne nous sommes pas intéressés à cet aspect de solidification. Le domaine d'étude a donc été limité à la partie liquide du métal au dessus de la surface de liquidus que nous appelons abusivement front de solidification.

I.3.2 - Phénomènes purement hydrauliques

a - Rugosité du front de solidification

Pour une première approche, nous avons supposé le front de solidification hydrauliquement lisse. Avec cette condition, les résultats des calculs (§-V) donnent une épaisseur de sous-couche visqueuse de l'ordre de 10^{-3} à 10^{-4} m. La hauteur des dendrites étant d'environ 200 μ m, l'hypothèse du front de solidification hydrauliquement lisse est réaliste.

b - Porosité

D'un point de vue macroscopique (par rapport aux mailles des tissus), le panier (lorsqu'il est utilisé) sépare le marais en deux zones : interne et externe. En effet, si on ne s'intéresse pas aux écoulements de maille, les transferts diffusif et convectif de l'énergie cinétique entre les deux zones sont inexistantes. Seule l'énergie potentielle se propage par les pores des tissus, et pilote le transfert de matière. Au chapitre IV, une loi de ce comportement macroscopique est tirée de l'analyse microscopique des écoulements poreux.

c - Régime d'écoulement

En cours de coulée, les flux de matière tirée et injectée s'équilibrent, l'injection (à la sortie de la busette, ou directement du canal, suivant le type d'injecteur) a une vitesse largement supérieure à celle du tirage qui est réparti sur toute la surface du front de solidification. C'est donc l'alimentation de la coulée qui fournit majoritairement le marais en énergie cinétique.

Le nombre de Reynolds construit à partir des paramètres du jet d'injection prend une valeur comprise entre 10^3 et 10^4 . Ce jet génère donc un écoulement turbulent dans le marais.

Pour les injecteurs avec panier, le jet confiné à l'intérieur n'alimente pas directement le reste du marais en énergie cinétique (voir alinéa précédent). Dans cette région externe au panier, où l'effet de la convection forcée est difficilement estimable, les métallurgistes ont parfois noté la présence de zones "calmes". La turbulence, si elle existe dans cette zone, n'est donc pas pleinement développée.

Par contre, comme on le verra dans le § I.3.4, la convection naturelle y est prépondérante.

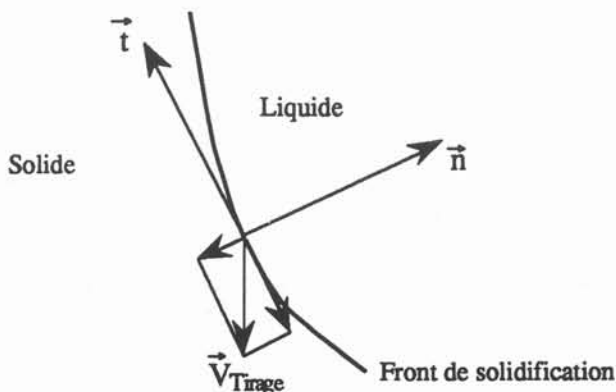
d - Couches limites turbulentes

Le front de solidification, la lingotière et le panier (s'il est utilisé), sont des obstacles à l'écoulement du métal liquide. A la surface de ces obstacles, les gradients normaux des composantes tangentielles de la vitesse, sont confinés dans de très minces couches appelées couches limites turbulentes.

Pour une modélisation bidimensionnelle des écoulements, TABERLET /I.2/ propose un modèle de couches limites hydrauliques se développant sur les parois lisses et étanches. Au chapitre II, une formulation tridimensionnelle de ce modèle est exposée.

En ce qui concerne les tissus perméables pour lesquels il y a pompage ou apport de liquide (selon le côté d'observation), les conditions de cette analyse ne sont pas totalement vérifiées. En considérant que les composantes normales de la vitesse sont très faibles par rapport aux composantes tangentielles, on peut supposer que la structure des couches limites n'est que peu modifiée. Finalement, les résultats de cette analyse seront admis même pour les parois poreuses.

Pour le front de solidification, la vitesse de tirage comporte, non seulement une composante normale non nulle, mais aussi une composante tangentielle (figure I.6). Dans ce cas, moyennant les mêmes hypothèses que pour les tissus, le modèle reste valable à la condition que l'on se place dans un repère lié à la paroi.



- Figure I.6 -
Décomposition de la
vitesse de tirage

I.3.3 - Phénomènes purement thermiques

a - Bilan thermique

En régime établi, la puissance thermique P_i fournie au marais par l'injection du métal chaud s'équilibre par :

- la puissance thermique prélevée au front de solidification par le tirage du métal P_t ,
- les échanges par contact entre l'aluminium liquide et le front de solidification P_f ,
- les échanges par contact entre l'aluminium liquide et la lingotière P_l ,
- les échanges à la surface libre par contact avec l'air ambiant P_c ,
- le rayonnement à la surface libre du métal sur l'environnement P_r .

Cet équilibre permet d'écrire :

$$P_i = P_t + P_f + P_l + P_c + P_r \quad (1)$$

On définit la puissance thermique totale échangée par le métal liquide avec son environnement, qui s'écrit :

$$P_{tot} = P_f + P_l + P_c + P_r \quad (2)$$

que l'on peut aussi écrire à l'aide de la relation (1)

$$P_{tot} = P_i - P_t \quad (3)$$

C'est cette puissance thermique totale qui nous servira de référence pour estimer l'importance des échanges à la surface libre. La suite de ce paragraphe est consacrée à l'évaluation de ces différents échanges et de leurs importances respectives.

b - Puissance thermique totale

En régime permanent, la puissance libérée par le métal liquide entre l'injection et le front de solidification, est estimée par la relation suivante :

$$P_{\text{tot}} = \rho C_p (T_{\text{inj}} - T_{\text{Liq}}) D \quad (4)$$

où ρ est la densité volumique de l'aluminium,
 C_p la capacité calorifique de l'aluminium,
 T_{inj} la température d'injection,
 T_{liq} la température de liquidus de l'alliage,
 D le débit volumétrique de métal que l'on peut exprimer par :

$$D = V_{\text{tir}} S \quad (5)$$

où V_{tir} est la vitesse de tirage,
 S la section de la plaque.

Il est alors pratique de définir un flux fictif de référence, qui rapporte la puissance totale à la section de la plaque. Ce flux s'exprime :

$$\varphi_{\text{ref}} = \frac{P_{\text{tot}}}{S} \quad (6)$$

c - Echange thermique par contact avec l'air ambiant

A la surface libre, un transfert thermique s'opère par conduction entre le métal chaud et l'air ambiant qui s'échauffe et se disperse sous l'effet de la thermo-convection. Des lois empiriques données par /1.3/ permettent d'estimer la quantité de chaleur prélevée par un fluide froid au-dessus d'une plaque chaude horizontale. Le coefficient d'échange h est fonction de nombres sans dimension tel que :

$$h = N_u \lambda L \quad (7)$$

avec $Nu = c Ra^n$

où Nu est le nombre de Nusselt qui rapporte le flux thermique effectif à un flux fictif de conduction.

Ra est le nombre de Rayleigh qui exprime le rapport entre les forces dues à la convection naturelle et les forces visqueuses qui en découlent,

c et n sont deux constantes empiriques dont les valeurs sont répertoriées

Type d'écoulement	Plage du nombre de Rayleigh	Coefficient c	Paramètre n
Laminaire	de 10^5 à 2.10^7	0.54	1 / 4
Turbulent	de 2.10^7 à 3.10^{10}	0.14	1 / 3

-Figure 1.7 -

Tableau des valeurs des paramètres permettant de calculer le nombre de Nusselt à partir des valeurs du nombre de Rayleigh (cf. /1.3/).

dans le tableau de la figure I.7.

Les nombres de Nusselt et de Rayleigh ont pour expression :

$$Nu = \frac{\varphi_c}{k \frac{\Delta T_{sa}}{L}} \quad (8)$$

$$Ra = \frac{g \beta \Delta T_{sa} L^3}{\nu \frac{k}{\rho C_p}} \quad (9)$$

avec φ_c : flux thermique échangé par contact,

ΔT_{sa} : écart de température entre la surface et la température ambiante à grande distance,

L : moyenne arithmétique de la longueur et la largeur de la surface,

g : accélération de la pesanteur,

k : conductivité thermique de l'air,

β : coefficient de dilatation de l'air,

ν : viscosité moléculaire de l'air,

ρ : densité volumique de l'air,

C_p : capacité calorifique de l'air.

d - Rayonnement à la surface libre

Nous cherchons ici à estimer la valeur du flux thermique échangé par rayonnement entre l'environnement et la surface libre de la coulée. Cet échange est issu de la superposition du rayonnement environnement-surface libre négligeable, et du rayonnement

surface libre-environnement qui s'exprime par la relation de Stefan-Boltzmann :

$$\varphi_r = \varepsilon \sigma T_s^4 \quad (10)$$

où ε est l'émissivité de l'aluminium ($\sim 0,2$),

σ la constante universelle de Stefan-Boltzmann qui vaut :

$$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2/\text{K}^4,$$

T_s la température absolue de la surface libre.

	Unités	Air au voisinage de 18 °C	Aluminium au voisinage de 700 °C
Masse volumique	kg / m ³	1,276	2 370
Viscosité moléculaire	m ² / s	13 10 ⁻⁶	1.2 10 ⁻⁶
Conductivité thermique	W K ⁻¹ m ⁻¹	25 10 ³	104,5
Capacité calorifique	J kg ⁻¹ K ⁻¹	10 ³	1 127
Coefficient de dilatation	K ⁻¹	10 ⁻³	1,037 10 ⁻⁴
Diffusivité thermique	m ² / s	19,6	4. 10 ⁻⁵
Température de solidification	°C		662

- Figure I.8 -
Propriétés physiques de l'air et de l'aluminium

Section plaque	Section d'injection	Vitesse de tirage	Surchauffe d'injection
de 0.2 m x 1. m à 0.5 m x 2. m	Coulée traditionnelle de 2. 10 ⁻³ m ² à 10 ⁻² m ² Coulée en charge de 0.510 ⁻² m ² à 2. 10 ⁻² m ²	de 0.5 10 ⁻³ m / s à 2. 10 ⁻³ m / s	de 30 K à 60 K

- Figure I.9 -
Ordre de grandeur des paramètres de coulée

e - Ordre de grandeurs des flux thermiques

Les valeurs des propriétés physiques de l'air et de l'aluminium, ainsi que les ordres de grandeurs des différents paramètres de coulée, sont respectivement répertoriés dans les tableaux des figures I.8 et I.9.

Le calcul pratique des différents flux donne :

$$\varphi_{\text{ref}} \sim 130 \text{ kW/m}^2 \quad (11)$$

$$10 \text{ kW/m}^2 < \varphi_c < 15 \text{ kW/m}^2 \quad (12)$$

$$8 \text{ kW/m}^2 < \varphi_r < 10 \text{ kW/m}^2 \quad (13)$$

Ces résultats montrent que si les échanges thermiques à la surface libre ne sont pas déterminants, ils ne sont pas pour autant totalement négligeables.

I.3.4 - Phénomènes thermohydrauliques

a - Thermo-convection

Sous l'effet de la température, l'aluminium se dilate, ce qui entraîne une modification de sa densité volumique de masse. Dans le marais, les gradients thermiques engendrent donc des inhomogénéités de la masse volumique qui se conjuguent avec la pesanteur pour donner des forces d'Archimède. Ces forces peuvent être source de convection naturelle se superposant à la convection forcée par l'injection et le tirage. Le nombre de Richardson permet de comparer les effets des forces d'Archimède et des forces d'inertie pour des régimes de convection mixte. Ce nombre est défini par :

$$Ri = \frac{g\beta\Delta T L}{V_0^2} \quad (14)$$

- où
- g est l'accélération de la pesanteur,
 - β le coefficient de dilatation de l'aluminium,
 - ΔT une échelle de température,
 - L une échelle de longueur,
 - V_0 une échelle de vitesse liée à la convection forcée.

	Coulée en charge	Intérieur panier	Extérieur panier	
			Coulée traditionnelle	Coulée en fausse charge
ΔT (K)	50	25	25	25
L (m)	0,5	0,1	0,2	0,5
V_o (m/s)	Vitesse d'injection 0,1	Vitesse d'injection 0,3	Vitesse de tirage 10^{-3}	Vitesse de tirage 10^{-3}
R_i	2,5	$3 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^3$	10^4
Forces dominantes	Forces équilibrées	Forces d'inertie	Forces d'Archimède	Forces d'Archimède

- Figure I.10 -

Tableau des valeurs des Nombres de Richardson
pour chaque type de coulée

Les échelles de vitesse sont fortement liées au type d'injection utilisé. Pour chacun d'entre eux, les valeurs des paramètres correspondants sont répertoriées dans le tableau de la figure I.10.

Finalement, quelque soit le type de coulée, il semble toujours exister une zone où les forces d'Archimède ne sont pas négligeables vis à vis des forces d'inertie.

b - Effet du gradient thermique

Les forces d'Archimède, liées aux inhomogénéités thermiques, agissent sur les fluctuations turbulentes du mouvement. En effet, si le gradient thermique est ascendant et donc stabilisant, ceci se traduit par un amortissement des fluctuations turbulentes. Inversement, si du métal chaud est situé au-dessous de métal "froid", les forces d'Archimède sont alors déstabilisantes et par la même source de turbulence.

Pour la coulée, cet effet stabilisant au voisinage du front de solidification est déstabilisant à la surface libre.

c - Couches limites thermiques

Sur la lingotière et au front de solidification, la présence de couches limites turbulentes favorise les transferts de chaleur. Les gradients thermiques peuvent alors être confinés dans de minces couches appelées couches limites thermiques.

Un modèle de couches limites thermiques se développant sur les parois lisses et étanches est exposé au chapitre II.

Pour le front de solidification, la vitesse de tirage se décompose en une composante tangentielle et une composante normale. Comme pour les couches limites hydrauliques, sans négliger le prélèvement de chaleur par le tirage de la matière, nous avons supposé qu'il ne modifiait que peu la couche limite thermique.

I.4 - TRAVAUX ANTERIEURS

Du point de vue de la modélisation numérique de la thermohydraulique des coulées verticales, la bibliographie est riche en publications. Nous trouvons notamment des articles traitant du problème axisymétrique de la coulée de billettes (voir par exemple /I.4/ à /I.7/). D'autres travaux de modélisation portent sur le problème tridimensionnel des coulées de plaques d'alliage d'aluminium (/I.8/ à /I.11/). Contrairement à l'objectif de cette étude, ces travaux privilégient les problèmes liés à la solidification, au détriment de la géométrie du système d'injection. Il n'existe pas à notre connaissance, d'approche numérique tridimensionnelle du couplage de la thermohydraulique et des lois de porosité.

Par ailleurs, il est intéressant de noter l'approche expérimentale d'une équipe allemande qui a réalisé des mesures de vitesse sur une maquette en eau /I.12/. Cette méthode a pour avantage de permettre la définition fidèle des formes de l'injecteur et du front de solidification. Par contre, l'aspect thermique n'étant pas modélisé, le manque d'information d'une part, et l'absence de convection naturelle d'autre part, sont préjudiciables à ces résultats.

Du point de vue de la sidérurgie, la coulée continue de brames d'acier a suscité de nombreux travaux de recherche en modélisation numérique. Pour ce procédé, une équipe japonaise, s'est intéressée à la l'aspect thermo-hydraulique en présence d'un champ électromagnétique ralentissant /I.13/. Pour ce faire, sont utilisés : le modèle LES (Large Eddy Simulation) et la méthode des différences finies dans des maillages quelconques. Ces travaux, pour lesquels la géométrie de la busette d'injection est fidèlement modélisée, donnent de bons résultats dans ce cas. Pour notre étude, la méthode n'est pas satisfaisante, car ni les forces de convection naturelle, ni les modèles des couches limites aux surfaces des obstacles, ne sont pris en compte.

CHAPITRE II**Modèles physiques**

CHAPITRE II

Modèles physiques

II.1 - EQUATIONS DE BASE

Les équations décrivant le champ de vitesse \vec{U} instantané sont les équations de Navier-Stokes, elles s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}(\rho \vec{U}) = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} + \vec{F} \quad (1)$$

avec ρ : densité volumique de masse,
 p : pression totale,
 \vec{F} : forces de volume,
 $\vec{\tau}$: tenseur des contraintes qui s'exprime :

$$\vec{\tau} = \rho \nu \vec{e} \quad (2)$$

où \vec{e} : est le tenseur du taux de déformation,
 ν : la viscosité moléculaire.

De plus, le champ de vitesse doit vérifier l'équation de continuité qui traduit le principe de conservation de la masse :

$$-\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3)$$

Du point de vue thermique, c'est l'équation de la chaleur qui gouverne le champ de température instantané T :

$$\rho C_p \frac{d}{dt} T = \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{\nabla} T) \quad (4)$$

où C_p est la capacité calorifique du liquide,
 α est sa conductivité thermique.

II.2 FORCES DE VOLUME

Pour être général et élargir le domaine d'application du code au-delà des phénomènes mis en jeu au cours de la coulée d'aluminium, nous avons admis des forces de volume de deux origines:

- les forces de gravité \vec{F}_g dont on prend en charge la modélisation,
- les forces externes \vec{F}_{ext} qui sont supposées connues et sont des données du problème. Ces forces peuvent être d'origine électromagnétique, elles pourront être calculées analytiquement, ou algorithmiquement par un autre code de calcul.

$$\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_{ext} \quad (5)$$

En ce qui concerne les forces de gravité, elles s'expriment par la relation suivante :

$$\vec{F}_g = \rho \vec{g} \quad (6)$$

avec ρ : masse volumique du liquide,
 \vec{g} : accélération de la pesanteur.

La masse volumique varie avec la température du liquide. Nous avons choisi le modèle de variation linéaire suivant :

$$\rho(T) = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (7)$$

avec T : température,
 T_0 : température de référence,
 β : taux de dilatation thermique,
 ρ_0 : masse volumique à la température T_0 .

Selon l'hypothèse habituelle de Boussinesq, pour isoler la partie variable de la force de gravité, nous définissons les grandeurs pratiques F_g^* et p^* telles que :

$$-\vec{\nabla} p + \vec{F}_g = -\vec{\nabla} p^* + \vec{F}_g^* \quad (8)$$

$$\vec{F}_g^* = -\rho_0 \beta (T - T_0) \quad (9)$$

La masse volumique est supposée constante partout ailleurs.

La pression s'exprime alors :

$$p = p^* - \rho_0 \|\vec{g}\| z \quad (10)$$

avec z axe ascendant.

II.3 MODELE k-ε

II.3.1 - Présentation du modèle

Pour les écoulements turbulents, mais cependant organisés en moyenne en circulation stationnaire, il est possible de prédire l'écoulement moyen.

Pour l'ensemble des variables Φ décrivant l'écoulement, on note $\bar{\Phi}$ la valeur moyenne définie à partir de la valeur instantanée $\Phi(t)$ par :

$$\Phi(t) = \bar{\Phi} + \varphi(t) \quad (11)$$

où $\varphi(t)$ est la fluctuation de Φ .

$$\Phi \in \{ \vec{U}, p, T \} \quad (12)$$

Selon l'hypothèse de Boussinesq, les champs moyens des variables sont régis par les équations de base (1, 3 et 4) dans lesquelles, l'effet des fluctuations turbulentes est modélisé par une modification des propriétés diffusives. On introduit alors la viscosité effective ν_e et la conductivité thermique effective α_e telles que :

$$\nu_e = \nu + \nu_t \quad (13)$$

$$\alpha_e = \alpha + \alpha_t \quad (14)$$

avec ν_t : viscosité turbulente supplémentaire,
 α_t : conductivité thermique turbulente supplémentaire.

La modélisation de ν_t est effectuée à l'aide du modèle de fermeture en un point le plus couramment utilisé, à savoir le "modèle k- ϵ " /II.1/. Ce modèle fait intervenir deux variables supplémentaires : l'énergie cinétique de la turbulence k et le taux de dissipation turbulente ϵ . Ces grandeurs, fonctions du point, sont régies par des équations de transport supplémentaires qui sont obtenues à partir des équations de Navier-Stokes pour les fluctuations /II.2/. Ces équations ainsi que les modèles de calcul de la viscosité et de la conductivité thermique turbulente sont présentés dans la suite de ce paragraphe.

II.3.2 - Energie cinétique de la turbulence

Elle est définie à partir des vitesses fluctuantes :

$$k = \frac{1}{2} \sum_i u_i^2 \quad (15)$$

C'est une densité massique d'énergie qui s'exprime donc en J/kg.

L'équation gouvernant la répartition de k s'écrit :

$$\frac{d}{dt}(\rho k) = \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \frac{\nu_t}{\sigma_k} \vec{\nabla} k \right) + P + G - \rho \epsilon \quad (16)$$

Le premier terme du second membre représente la diffusion de k par la turbulence elle-même.

σ_k est une constante empirique proche de l'unité.

Le terme P désigne la production de l'énergie cinétique par cisaillement de l'écoulement moyen :

$$P = \rho \nu_t \vec{e} \cdot \vec{e} \quad (17)$$

Le terme G définit la production ou la destruction de l'énergie cinétique de la turbulence due à l'action des forces de l'accélération de la pesanteur. G s'écrit :

$$G = \rho \beta \frac{v_t}{\sigma_t} \vec{g} \cdot \vec{\nabla} T \quad (18)$$

σ_t est une constante empirique dont la valeur est discutée lors de la présentation du modèle de conductivité thermique turbulente α_t .

II.3.3 - Taux de dissipation turbulente ϵ

Il représente la densité volumique de puissance mécanique dissipée par turbulence.

L'établissement du modèle permettant le calcul de ϵ nécessite l'hypothèse du nombre de Reynolds grand. Rodi /II.1/ suggère l'écriture suivante :

$$\frac{d}{dt}(\rho\epsilon) = \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \vec{\nabla} \epsilon \right) + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} (P+G) (1 + C_{3\epsilon} R_f) - C_{2\epsilon} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (19)$$

où σ_ϵ , $C_{1\epsilon}$, $C_{2\epsilon}$, $C_{3\epsilon}$ sont des constantes empiriques (/II.3/) rassemblées dans le tableau de la figure II.1.

Le nombre R_f de flux de Richardson décrit le rapport entre l'action des forces d'Archimède et celle des forces de cisaillement :

$$R_f = - \frac{G}{P} \quad (20)$$

II.3.4 - Modèle de viscosité turbulente v_t

La viscosité turbulente est reliée aux variables k et ϵ par :

$$v_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (21)$$

où C_μ est une constante empirique qui vaut 0,09.

C_μ	$C_{1\varepsilon}$	$C_{2\varepsilon}$	$C_{3\varepsilon}$	σ_t	σ_k	σ_ε
0.09	1.44	1.92	0.8	1.	1.	1.3

- Figure II.1 -

Valeurs des constantes empiriques
utilisées dans les équations du modèle k-ε

II.3.5 - Modèle de conductivité thermique turbulente α_t

Elle est estimée à l'aide de la relation suivante :

$$\sigma_t = \frac{v_t}{\chi_t} = \frac{v_t}{\alpha_t / \rho C_p} \quad (22)$$

où σ_t est le nombre de Prandtl turbulent associé au fluide.

Pour les métaux, il s'avère que la diffusion turbulente v_t de la quantité de mouvement est comparable à celle χ_t de la température. Expérimentalement on trouve que σ_t est proche de l'unité pour les métaux. Nous avons choisi dans nos calculs $\sigma_t = 1$.

II.4 LOI DE COUCHES LIMITES HYDRAULIQUES

Il s'agit d'exprimer l'adhérence du fluide à une paroi, ce qui est relativement aisé dans le cas d'écoulements laminaires. Dans le cas d'écoulements à grands nombres de Reynolds, la difficulté est plus grande. En effet, la vitesse du fluide ne décroît que dans une couche limite turbulente très mince (quelques millimètres) proche de la paroi. Cette zone où les gradients de vitesse sont très importants, a une épaisseur généralement inférieure à la dimension minimale possible de discrétisation. Dans cette configuration, l'approche linéaire du profil de vitesse n'est pas satisfaisante, nous avons donc utilisé un modèle qui traduit le comportement logarithmique pseudo-universel dans les couches limites turbulentes.

II.4.1 - Profil de vitesse

Dans la couche limite, où la composante de la vitesse normale à la paroi ainsi que les dérivées tangentielles peuvent être considérées nulles, l'équation (1) du transport de la quantité du mouvement s'écrit :

$$\frac{d}{dt} (\rho \vec{U}) = - \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{\tau} + F_x \vec{i}_x \quad (23)$$

avec x : direction du mouvement (tangent à la paroi),

y : direction normale à la paroi.

En supposant alors que les forces s'équilibrent avec le gradient de pression et l'inertie, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial y} \vec{\tau} = \vec{0} \quad (24)$$

En notant $\vec{\tau}_0$ le frottement pariétal, l'intégration de (24) permet d'écrire :

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_0 \quad (25)$$

Par ailleurs, à l'intérieur de la couche limite turbulente, la contrainte de cisaillement s'écrit :

$$\vec{\tau} = \rho v_e \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} \quad (26)$$

L'intégration de cette équation nécessite la connaissance de la viscosité effective. A l'intérieur de la sous-couche visqueuse, elle est égale à la viscosité moléculaire. En dehors de cette sous-couche et à l'intérieur de la couche limite turbulente, un modèle empirique peut être utilisé. En pratique, la viscosité effective est estimée de la façon suivante :

$$\text{pour } y_+ \leq \lambda \quad v_e = \nu \quad (27)$$

$$\text{pour } y_+ > \lambda \quad v_e = K \nu y_+ \quad (28)$$

où K est la constante de Karman,

λ une constante empirique,

y_+ une variable adimensionnelle définie par :

$$y_+ = y / \delta_0 \quad (29)$$

avec δ_0 épaisseur de la sous-couche visqueuse que l'on estime par :

$$\delta_0 = \nu / U_* \quad (30)$$

où U_* désigne la vitesse de frottement définie à partir du frottement pariétal $\vec{\tau}_0$ par la relation suivante :

$$\vec{\tau}_0 = -\rho U_*^2 \frac{\vec{U}(y) - \vec{U}(0)}{\|\vec{U}(y) - \vec{U}(0)\|} \quad (31)$$

où $\vec{U}(0)$ est la vitesse de défilement de la paroi.

Finalement, l'intégration de l'équation (26) permet d'obtenir avec (25), (27) et (28) l'expression du profil de vitesse :

$$\text{pour } y_+ \leq \lambda \quad \vec{U}(y) - \vec{U}(0) = \frac{\vec{\tau}_0}{\rho \nu} y \quad (32)$$

$$\text{pour } y_+ > \lambda \quad \frac{\|\vec{U}(y) - \vec{U}(0)\|}{U_*} = \frac{1}{K} \ln(e_1 y_+) \quad (33)$$

$$\text{avec } e_1 = \exp(k\lambda) / \lambda \quad (34)$$

Cette expression nécessite la connaissance de la vitesse de frottement qui peut être reliée à l'énergie cinétique de la turbulence par la constante empirique C_μ :

$$U_*^2 = C_\mu^{1/2} k \quad (35)$$

II.4.2 - Comportement des variables k et ε dans la couche limite

Dans l'équation (16) du transport de la variable k , le terme de production P devient :

$$P = \rho \nu_e \left(\vec{\tau}_0 / \rho \nu_e \right)^2 \quad (36)$$

Le taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence peut être directement relié à la vitesse de frottement par :

$$\varepsilon = U_*^3 / l \quad (37)$$

où l est l'échelle des tourbillons qui est estimée comme suit :

$$l \sim Ky \quad (38)$$

II.4.3 - Formulation pratique

L'écoulement dans les couches limites est couplé à l'écoulement global. Ce problème non linéaire est résolu itérativement avec une formulation particulière, s'insérant bien dans l'algorithme SIMPLE que nous avons choisi, et lui assurant une bonne efficacité.

La discrétisation du problème fait apparaître deux régions :

i - une région "surfactive" collée aux parois. L'épaisseur y_p de cette région qui est faible par rapport à ses deux autres dimensions, est une fonction du point déterminée par la discrétisation du domaine d'étude.

ii - une région volumique à l'extérieur de la précédente.

a - Modification de l'équation du transport de qdm

A l'intérieur de la région surfactive, la contrainte de cisaillement doit être reliée à l'écoulement à l'interface des deux régions par la formulation suivante :

$$\text{pour } y_p < \lambda \delta_0, \quad \vec{\tau} = \rho \nu \frac{\vec{U}_{(y_p)} - \vec{U}_{(0)}}{y_p} \quad (39)$$

pour $y_p > \lambda \delta_0$, la vitesse de frottement peut être déduite, soit du champ de vitesse, soit de l'énergie de la turbulence respectivement par les expressions (33) et (35).

Dans la formulation (31) nous avons choisi de mêler ces deux expressions pour obtenir :

$$\vec{\tau} = \frac{\rho C_\mu^{1/4} k^{1/2}}{\ln(e_1 y_p / \delta_0) / K} (\vec{U}_{(y_p)} - \vec{U}_{(0)}) \quad (40)$$

La contrainte de cisaillement ainsi calculée peut être réintroduite dans l'équation générale (1) du transport de la quantité de mouvement.

b - Modification de l'équation de k

C'est l'intégration sur l'épaisseur de la région surfacique des termes de production et de dissipation turbulente qui est modifiée et peut être estimée par :

$$\int_0^{y_p} P \, dy = \vec{\tau} \cdot (\vec{U}_{(y_p)} - \vec{U}_{(0)}) \quad (41)$$

où $\vec{\tau}$ prend la valeur du cisaillement, calculé lors de la résolution de l'équation de transport de la quantité de mouvement.

En ce qui concerne ϵ , l'intégration de l'équation (37) avec (38) et (35) donne :

$$\int_0^{y_p} \epsilon \, dy = \int_{\delta_0/\alpha}^{y_p} = \frac{C_\mu^{3/4}}{K y_p} \ln(\lambda y_p / \delta_0) \quad k^{3/2}(y_p) \quad (42)$$

c - Modification de l'équation de ϵ

Les expressions (35), (37) et (38) permettent d'estimer la variable ϵ à l'interface des deux régions :

$$\epsilon(y_p) = C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}(y_p)}{k y_p} \quad (43)$$

Cette valeur pourra être prise comme la condition à la limite de la région volumique.

II.5 LOI DE COUCHES LIMITES THERMIQUES

II.5.1 - Profil de température

Aux couches limites hydrauliques peuvent correspondre des couches limites thermiques au sein desquelles les gradients de température sont tels que l'approche linéaire du profil de température n'est pas satisfaisante.

Dans ces couches limites où les gradients tangentiels peuvent être négligés face aux gradients normaux, l'équation (4) du transport de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial y} (\alpha_e \frac{\partial}{\partial y} T) = 0 \quad (44)$$

avec y direction normale à la paroi.

L'intégration de cette équation nécessite la connaissance de la conductivité effective qui est reliée à la viscosité turbulente par les équations (14) et (22). L'évaluation de la viscosité turbulente pourrait être faite de la même façon que pour l'estimation du profil de vitesse. Nous avons préféré une méthode plus raffinée qui fait intervenir la vitesse de fluctuation u' et l'échelle intégrale l par la relation :

$$\nu_t = C_\mu u' l \quad (45)$$

L'échelle intégrale est déterminée par l'équation (38) et l'estimation du profil de u' est la suivante :

$$\text{pour } y_+ \leq \lambda, \quad u'(y_+) = U_* y_+ / \lambda \quad (46)$$

$$\text{pour } y_+ > \lambda, \quad u'(y_+) = U_* \quad (47)$$

Finalement, l'intégration de (44) donne :

pour $y_+ < \lambda$

$$T(y_+) - T(0) = - \frac{\Phi_0}{\alpha} \sqrt{\lambda \delta_0 \delta_T} \operatorname{Arctg} \left(\sqrt{\frac{\delta_0}{\lambda \delta_T}} y_+ \right) \quad (48)$$

pour $y_+ > \lambda$

$$T(y_+) - T(0) = - \frac{\Phi_0}{\alpha} \left[\delta_T \ln \left(\frac{1+y_+ \frac{\delta_0}{\delta_T}}{1+\lambda \frac{\delta_0}{\delta_T}} \right) + \sqrt{\lambda \delta_0 \delta_T} \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{\lambda \delta_0}{\delta_T}} \right] \quad (49)$$

où ϕ est une constante d'intégration qui représente le flux thermique que la paroi transmet au fluide, δ_T est l'épaisseur de la couche limite thermique définie par :

$$\delta_T = \delta_0 \frac{\sigma_t}{P_r} \frac{\delta_0}{C\mu K} \quad (50)$$

II.5.2 - Formulation pratique

On définit un coefficient d'échange thermique h dans la région "surfacique" mince d'épaisseur y_p

$$\phi_0 = -h(y_p) (T(y_p) - T(0)) \quad (51)$$

L'expression de h se déduit aisément des formules (48) et (49).

II.6 LOI DE POROSITE

A la vue des résultats du chapitre IV, nous avons choisi de modéliser le comportement poreux des tissus diffuseurs par la loi suivante :

$$\zeta = \frac{A}{Re^*} + B \quad (52)$$

où A et B sont deux paramètres empiriques associés au tissu,

ζ et Re^* sont respectivement le coefficient de perte de charge et le nombre de Reynolds de maille dont les définitions sont données au § IV.

CHAPITRE III

Le code de calcul

CHAPITRE III

Le code de calcul

Ce chapitre est consacré à la description du code de calcul, baptisé CEPHISE, développé à partir des modèles de comportements thermohydrauliques que nous avons présentés au chapitre II. Pour conclure, nous tentons de faire une critique objective de ce code.

III.1 EQUATIONS A RESOUDRE

III.1.1 Equations en coordonnées cartésiennes

Le programme utilise les variables primitives : vitesse et pression. Il résout le système différentiel constitué des équations

- i - de conservation de la masse,
- ii - de transport de la quantité de mouvement,
- iii - de transport de l'énergie cinétique de la turbulence,
- iv - de transport du taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence,
- v - du transport de la chaleur.

Les équations de transport peuvent se mettre sous la forme canonique suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\lambda_{\phi}^c \phi) + U_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_{\phi}^c \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_{\phi}^d \frac{\partial \phi}{\partial x_i}) + S\phi \quad (1)$$

(1)

(2)

(3)

(4)

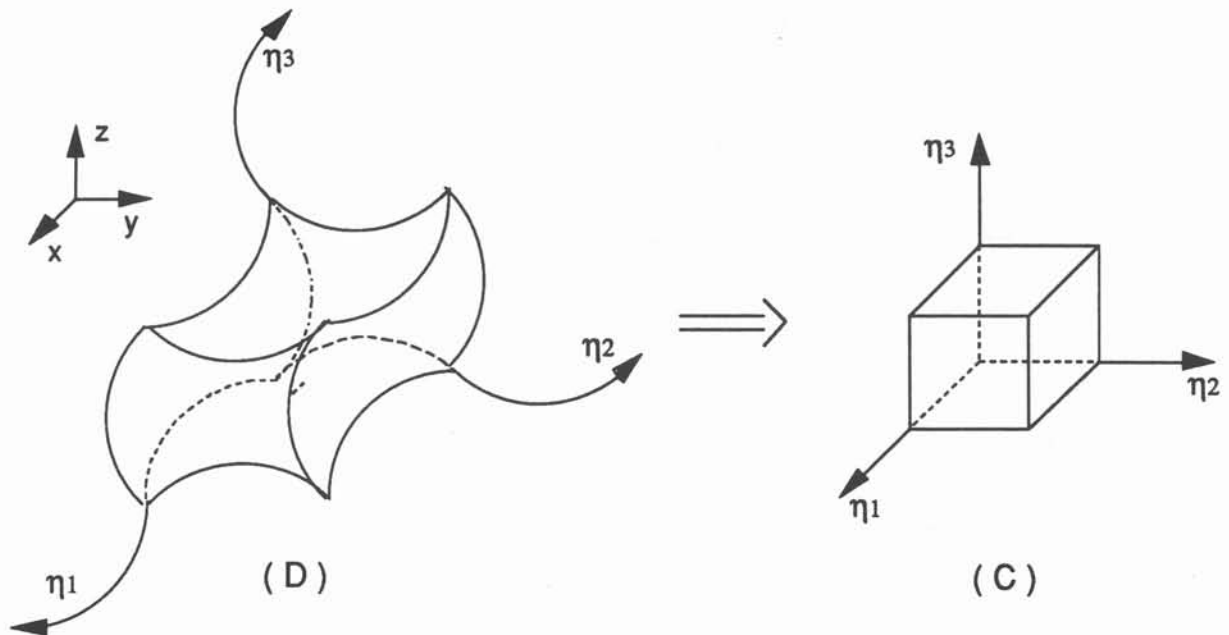
avec $\phi \in \{ U_1, U_2, U_3, k, \epsilon, T \}$,

λ_{ϕ}^c et λ_{ϕ}^d sont des coefficients de convection et de diffusion associés à la variable ϕ . Leurs expressions sont données dans le tableau de la figure III.1.

Φ	λ_{Φ}^c	λ_{Φ}^d	s_{Φ}
U_j $j \in \{1,2,3\}$	ρ	ρv_e	$-\frac{\partial p}{\partial x_j} + F_j$
k	ρ	$\rho v_e / \sigma_k$	$P + G - \rho \varepsilon$
ε	ρ	$\rho v_e / \sigma_{\varepsilon}$	$C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (P+G) (1+C_{3\varepsilon} R_f) - C_{2\varepsilon} \varepsilon^2 / k$
T	ρC_p	α_e	0

- Figure III.1 -

Coefficients des équations de transport en coordonnées cartésiennes.



- Figure III.2 -

Transformation curviligne orthogonale

Dans cette formulation on reconnait les termes :

- (1) de variation temporelle,
- (2) de convection,
- (3) de diffusion,
- (4) de source.

III.1.2 Coordonnées curvilignes orthogonales

L'utilisation des équations en coordonnées curvilignes orthogonales qui épousent les frontières du domaine de calcul, est motivée par la forme complexe du front de solidification. L'expression des conditions aux limites est ainsi rendue plus simple. Les opérateurs différentiels quant à eux sont plus compliqués.

a - Principe

Une transformation curviligne est une fonction de transfert entre un domaine physique géométriquement quelconque et un domaine mathématique simple. En pratique nous nous sommes limités à l'espace mathématique tridimensionnel le plus simple à savoir le cube unitaire.

Si dans cette transformation, les angles droits sont conservés, alors les coordonnées curvilignes sont dites orthogonales. Dans ce cas, les expressions des conditions aux limites et des opérateurs différentiels sont plus simples, c'est la raison pour laquelle nous nous sommes limités à l'utilisation de ce type de transformation.

Les coordonnées curvilignes orthogonales les plus fréquemment rencontrées sont les coordonnées sphériques et cylindropolaires. Plus généralement une telle transformation entre les coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) et les coordonnées curvilignes orthogonales (η_1, η_2, η_3) transforme le domaine physique (D) de la figure III.2 en un cube (C).

Un changement de coordonnées est entièrement défini par la fonction $\vec{x}(\vec{\eta})$. De telles fonctions peuvent être obtenues analytiquement pour les domaines physiques restant relativement simples. Pour les domaines plus complexes, des méthodes numériques proposées par /III.1/ à /III.7/ peuvent être

utilisées. Dans le cadre de ce travail, nous nous sommes limités à l'utilisation de transformations analytiques, bien que le code soit prévu pour réaliser les calculs en coordonnées curvilignes orthogonales quelconques.

b - Changement de base vectorielle

En tout lieu du domaine physique, on définit une base vectorielle, telle que ces vecteurs soient tangents aux axes curvilignes et normés dans le système métrique. Les vecteurs de cette base s'obtiennent par la formulation suivante :

$$\vec{e}_{\eta_j} = \frac{1}{h_j} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \eta_j} \quad j \in \{1, 2, 3\} \quad (2)$$

où h_j , le facteur d'échelle suivant l'axe η_j , représente la compression ou la dilatation du domaine suivant cet axe. Il s'exprime :

$$h_j^2 = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \eta_j} \right)^2 \quad (3)$$

Les coefficients de la matrice de passage entre la base curviligne ainsi définie et la base cartésienne, s'écrivent :

$$M(\vec{\eta} \rightarrow \vec{x})_{ij} = \frac{1}{h_j} \frac{\partial x_i}{\partial \eta_j} \quad (4)$$

Pour les transformations orthogonales, la matrice de passage inverse s'obtient simplement par :

$$M(\vec{x} \rightarrow \vec{\eta})_{ji} = M(\vec{\eta} \rightarrow \vec{x})_{ij} \quad (5)$$

Ces changements de repères qui ont pour propriété de conserver la norme sont utiles pour :

i - d'une part, définir dans le repère de calcul curviligne, les données vectorielles telles que : les vitesses aux limites, le champ d'accélération de la gravité et les éventuelles forces extérieures.

ii - d'autre part, ramener dans le repère d'exploitation le champ de vitesse solution.

c - Opérateurs différentiels

Dans la transformation, les termes liés à la géométrie sont modifiés. En particulier les opérateurs différentiels sont affectés et font apparaître de nouveaux termes tels que :

- la courbure, qui s'écrit :

$$H_i(j) = \frac{1}{h_i h_j} \frac{\partial h_i}{\partial \eta_j} \quad (6)$$

- le jacobien de la transformation, qui représente la compression ou la dilatation du volume dans le changement de coordonnées et s'écrit :

$$h = h_1 h_2 h_3 \quad (7)$$

III.1.3 Equations en coordonnées curvilignes orthogonales

L'analyse tensorielle développée par certains auteurs /III.8/ et /III.9/ permet d'obtenir les équations de transport dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales (η_1, η_2, η_3) quelconques :

$$h \frac{\partial}{\partial t} (\lambda_\phi^c \phi) + \frac{\partial}{\partial \eta_i} \left[\frac{h}{h_i} (\lambda_\phi^c U^i \phi - \lambda_\phi^d \frac{\partial \phi}{\partial \eta_i}) \right] = h S_\phi \quad (8)$$

(1)

(2)

(3)

(4)

Dans cette expression, la vitesse est représentée dans le repère curviligne par ces composantes U^i . Dans toute la suite de ce document, l'indice en exposant repère les grandeurs exprimées dans le domaine de calcul.

Les termes (1), (2), (3) et (4) ont la même signification que dans l'équation (1). L'expression des coefficients est inchangée, à l'exception des termes sources associés aux composantes de la vitesse. Leur formulation qui est lourde et ne présente pas d'intérêt est fournie en annexe I.

III.2 ALGORITHME SIMPLE

Dans les équations de la mécanique des fluides, le champ de vitesse apparait comme une variable explicite de l'équation du transport de la quantité de mouvement. La pression est associée à l'équation de la conservation de la masse pour laquelle elle est une variable implicite. Pour traiter ce problème, nous avons utilisé l'algorithme appelé SIMPLE qui a été créé par PATANKAR /III.10/. Cet algorithme itératif consiste dans la succession d'étapes suivante :

i - l'estimation des champs de vitesse, de pression et des scalaires passifs,

ii - la résolution de l'équation linéarisée du transport de la quantité de mouvement pour obtenir le champ de vitesse \vec{U}^* ainsi que l'estimation au premier ordre de l'influence sur le champ de vitesse d'une correction du gradient de pression pour obtenir une évaluation de :

$$\frac{\partial U_i}{\partial \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)} \quad (9)$$

iii - le calcul de la correction δp de pression, telle que le champ de vitesse satisfasse à l'équation de conservation de la masse,

iv - la correction du champ de pression par :

$$p = p^* + \delta p \quad (10)$$

v - le calcul de la correction de vitesse qui s'écrit :

$$\delta U_i = \frac{\partial U_i}{\partial \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)} \delta \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \quad (11)$$

que l'on peut relier à la correction de pression par :

$$\delta U_i = \frac{\partial U_i}{\partial \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)} \frac{\partial (\delta p)}{\partial x_i} \quad (12)$$

vi - la correction du champ de vitesse avec :

$$U_i = U_i^* + \delta U_i \quad (13)$$

vii - le calcul des champs scalaires couplés à l'écoulement

viii - si la convergence n'est pas atteinte, on recommence l'enchaînement des opérations à partir de l'étape ii en prenant :

$$U^* = U \quad \text{et} \quad p^* = p \quad (14)$$

Remarque : Dans l'étape iii, l'exactitude de l'estimation de la correction de pression n'est pas cruciale, l'essentiel étant que son ordre de grandeur soit respecté et surtout qu'elle soit nulle à la convergence.

III.3 METHODE DES VOLUMES FINIS

Cette méthode nécessite le découpage du domaine en volumes suffisamment petits pour isoler un comportement physique, dont on connaît une formulation mathématique explicite. L'ensemble des volumes qui recouvre la totalité du domaine en constitue le maillage. Entre deux volumes adjacents, la surface commune de leurs enveloppes est appelée facette. Pour les volumes à la limite, leurs facettes externes sont dites facettes à la limite.

La méthode des volumes finis qui est aussi appelée méthode conservatrice consiste dans l'intégration des équations différentielles sur chacun des volumes du maillage. Pour les termes en divergence, cette intégration fait apparaître des intégrales de flux sur les facettes. En formulant que, d'une part, le débit des flux par une facette est indépendant du volume d'observation, et que, d'autre part, pour chacun des volumes, les débits par les facettes doivent globalement s'équilibrer avec la partie volumique de l'intégrale, on réalise la discrétisation du système différentiel.

L'expression pratique des intégrales passe par la pondération du domaine et

l'interpolation des variables. La pondération est un ensemble de points choisis par rapport au découpage pour former les noeuds du maillage. L'interpolation est une fonction qui donne une estimation d'une variable en tous points du domaine, à partir des valeurs nodales de la variable. Le choix de fonctions linéairement paramétrées par les valeurs nodales permet d'exprimer ces valeurs nodales comme la solution d'un système linéaire comptant autant d'équations qu'il existe de noeuds où la variable est inconnue.

En général, de nombreux coefficients du système linéaire sont nuls. La facilité de sa résolution dépend du conditionnement de la matrice creuse des coefficients, qui dépend lui-même de la topologie du maillage, de la numérotation des noeuds et du domaine d'influence du schéma de discrétisation.

Les maillages les plus couramment utilisés sont des grilles régulières du domaine mathématique pour lesquels le stockage symbolique de la matrice est aisé. L'utilisation beaucoup plus complexe de découpages déstructurés, proposée par exemple en bidimensionnel par /III.11/, n'a pas été envisagée pour notre problème tridimensionnel.

Les grilles ont, en outre, l'avantage de permettre une description simple des volumes du maillage et de leurs facettes. Il en résulte une relative simplicité des intégrations sur ces domaines.

En ce qui concerne la pondération du domaine, nous avons associé un noeud positionné au centre de l'image mathématique de chaque volume de contrôle.

III.4 GRILLES DE DECOUPAGE

Nous avons utilisé un réseau de quatre grilles décalées qui permet d'améliorer facilement le schéma de discrétisation de certains opérateurs (/III.10/).

III.4.1 Grille principale (ou grille scalaire)

Elle est associée aux grandeurs scalaires telles que :

- les variables : p , k , ε , T ,

- les propriétés : $\rho, \nu, C_p, \alpha,$
- les variables intermédiaires : $\nu_e, \alpha_e, R_f, \dots$

A chaque volume définis par cette grille, correspond un noeud où ces variables sont calculées. Pour faciliter la définition des conditions aux limites, ce réseau de noeuds est complété par des noeuds situés au centre de chacune des facettes de l'enveloppe du cube de calcul (figure III.3.a).

III.4.2 Grilles décalées (ou grilles vectorielles)

Pour la discrétisation des composantes des grandeurs vectorielles (vitesse, force, gravité), on définit trois grilles supplémentaires associées à chacune des directions de l'espace de calcul. Dans cet espace, elles sont décalées d'un demi pas dans la direction à laquelle elles sont associées (figures III.3.b et III.3.c).

Par ce décalage, les noeuds des réseaux définis à partir de ces grilles, sont localisés au centre des facettes des volumes scalaires.

Pour les mêmes raisons et de la même façon que le réseau principal, on complète les réseaux décalés (figure III.3.a).

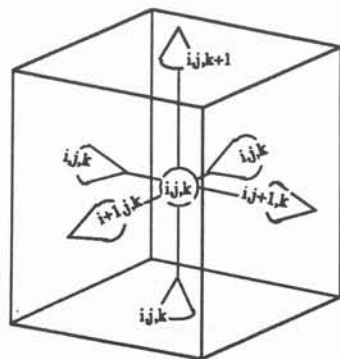
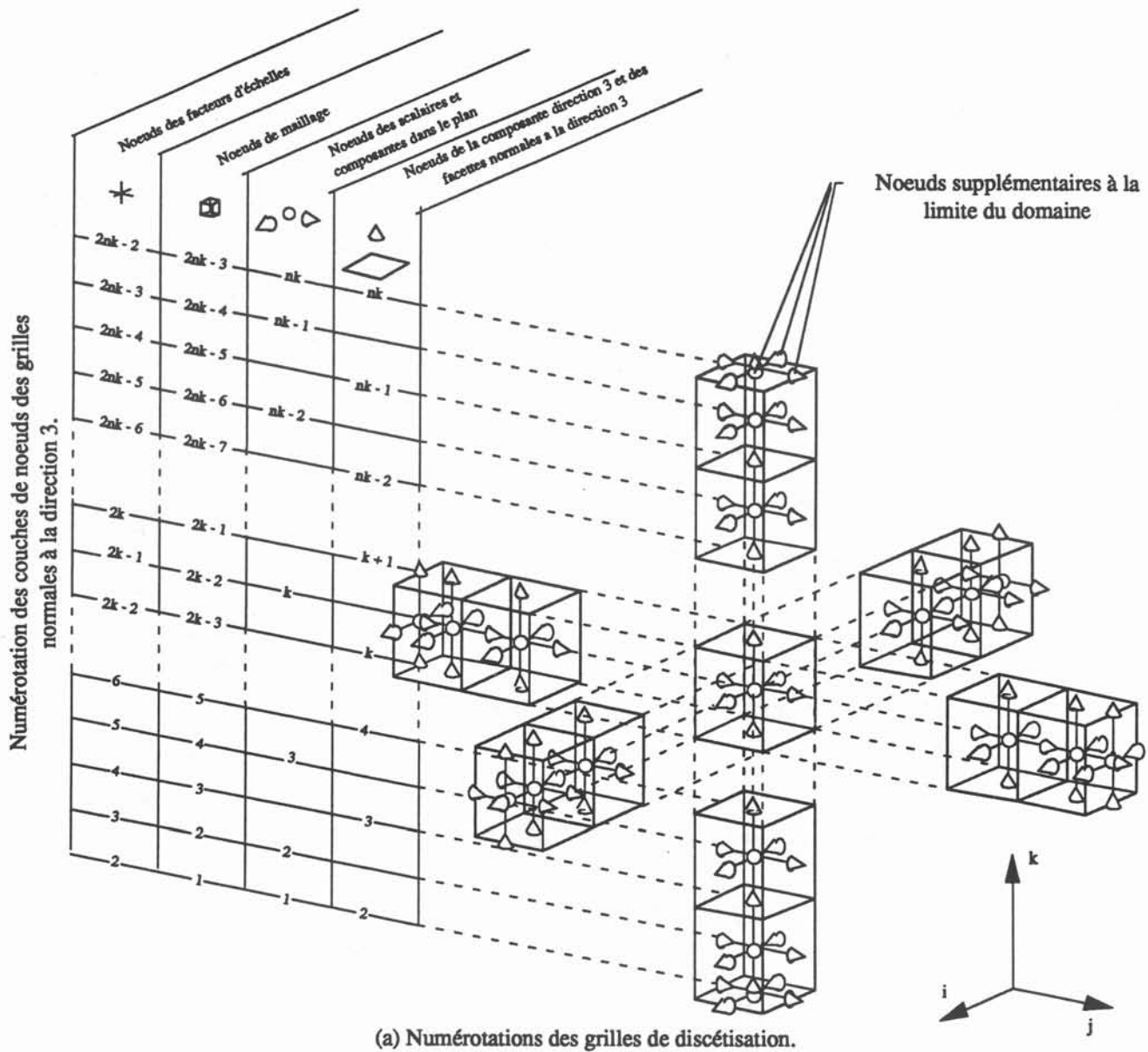
III.4.3 Numérotations

La position relative entre deux éléments (volumes et/ou facettes d'une même grille ou de deux grilles différentes) est une information dont la facilité d'utilisation entraîne l'aisance de mise en oeuvre des schémas numériques.

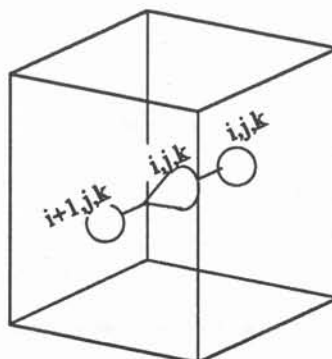
Pour cette raison, les numérotations des volumes et de leurs noeuds associés, sont construites à partir de trois jeux d'indices (i, j, k) affectés à chacune des directions (1, 2, 3) de l'espace de calcul (figure III.3.a).

Dans une direction donnée, l'indice des noeuds scalaires croît par pas de un pour chaque volume, depuis le noeud à la limite inférieure, jusqu'à celui de la limite supérieure.

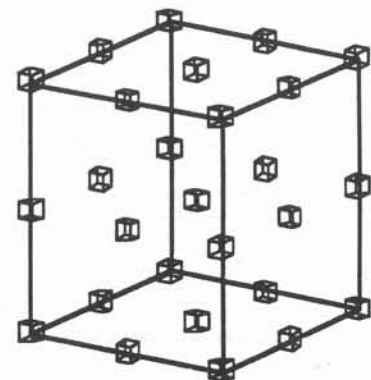
Un noeud associé à la composante d'un vecteur, porte le même indice que le noeud scalaire vers lequel il est orienté.



(b) Volume de contrôle des scalaires.



(c) Volume de contrôle de la composante vectorielle direction 1.



(d) Positionnement des noeuds géométriques (maillage et facteurs d'échelle).

- Figure III.3 -
Grilles de discrétisation.

Les volumes sont numérotés de la même façon que les noeuds qui leur sont associés.

Cette numérotation, qui permet par la seule connaissance des indices d'un volume de retrouver ses voisins, sans passer par une table de voisinage, est économique en place mémoire.

En ce qui concerne les facettes de la grille principale, elles sont numérotées comme les noeuds vectoriels avec lesquels elles coïncident.

III.4.4 Grille géométrique

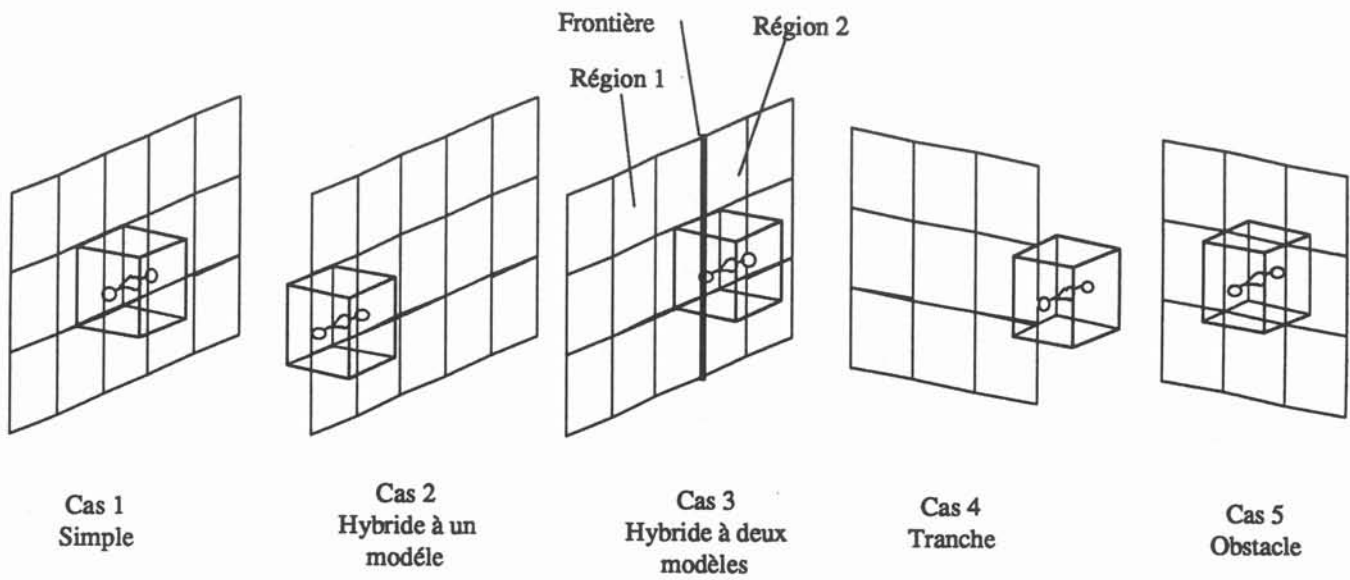
Les informations géométriques telles que les coordonnées et les facteurs d'échelles, sont calculées sur la grille double, définie par la superposition des trois grilles décalées et de la grille centrée. Dans de telles conditions, le stockage de ces informations est très coûteux en place mémoire. Toutefois, notre choix a été motivé, d'une part par le gain de précision qu'il permet d'obtenir dans l'expression des opérateurs de différentiation et d'intégration, et, d'autre part, par la simplicité de son utilisation.

La numérotation des noeuds de cette grille est aussi construite à partir d'un jeu de trois indices l , m et n (voir figures III.3.d et III.3.a)

III.4.5 Définition des régions surfaciques

Le maillage doit permettre la définition des conditions aux limites et des éventuels obstacles internes (tissus diffuseurs). Nous avons choisi de définir ces régions surfaciques par des ensembles de facettes de la grille principale.

Ce choix est une contrainte supplémentaire pour l'obtention des coordonnées curvilignes orthogonales. Pour ne pas alourdir davantage ce problème, nous avons donné la possibilité au code de traiter des régions définies par des ensembles quelconques de facettes.



- Figure III.4 -

Configurations topologiques des facettes des volumes de contrôles des composantes de la vitesse.

III.4.6 Traitement des régions surfaciques

Dans l'espace de calcul, le positionnement relatif entre un volume et les facettes des régions surfaciques, donne le type de traitement à effectuer. L'ensemble des volumes affectés par la présence d'une facette d'une région donnée, est définie par le domaine d'influence du schéma de discrétisation. Pour CEPHISE, où seuls les plus proches voisins interviennent, les cas de figures sont déjà nombreux.

Pour les volumes scalaires, un unique cas est répertorié : la facette choisie est une facette du volume.

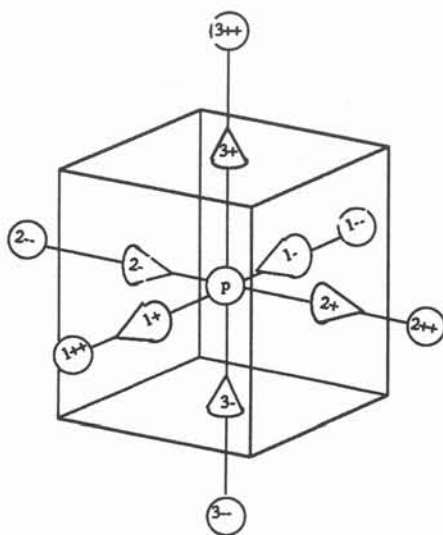
Pour les volumes vectoriels, compte tenu du décalage, il apparaît cinq cas (figure III.4), dont les traitements correspondants sont :

- i - les traitements simples, lorsqu'un seul modèle intervient c'est le cas 1,
- ii - les traitements hybrides, lorsque deux modèles cohabitent, il s'agit des cas 2 et 3,
- iii - les traitements de tranches, pour lesquels les volumes sont en contact avec la tranche d'une facette surfacique, comme dans le cas 4,
- iv - les traitements d'obstacles, pour lesquels les noeuds des composantes coïncident avec la facette de région surfacique, c'est le cas 5.

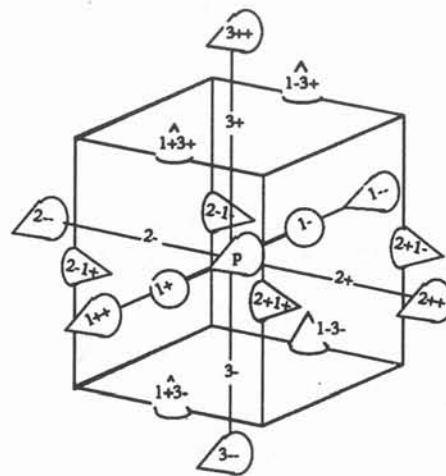
A chacun de ces cas topologiques, correspond un ensemble de volumes constituant une région de traitement particulier. Plusieurs de ces cas de figures pouvant se combiner, il peut exister des zones de recouvrement entre différentes régions de traitement.

Pour certains types de traitements, des variables intermédiaires supplémentaires sont nécessaires au calcul itératif. Par exemple, pour les lois de couches limites, on introduit :

- le scalaire δ_0 (épaisseur de la couche limite),
- les composantes du vecteur $\vec{\tau}$ (frottement pariétal).



(a) Voisinage d'un noeud scalaire.



(b) Voisinage d'un noeud vectoriel.

- Figure III.5 -
Numérotation locale.

Ces variables supplémentaires sont affectées aux noeuds des régions de traitement, en respectant le décalage.

Pour chacune de ces variables supplémentaires, et pour chacune des régions de traitement, nous avons adopté une numérotation à un indice. Celle-ci donne une grande souplesse de définition des régions, mais nécessite l'utilisation de tables de voisinage.

En pratique, toutes les informations sont ramenées aux volumes de traitement. En reprenant l'exemple précédent de la couche limite, un volume scalaire de la région de traitement correspondante est défini par :

- l'orientation de la facette concernée,
- les indices i, j et k du volume,
- l'indice du noeud de δ_0 correspondant,
- les quatres indices des noeuds des composantes de $\vec{\tau}$ (2 noeuds décalés dans chacune des 2 directions tangentes).

Un volume vectoriel dans les mêmes conditions est défini par :

- l'orientation de la facette concernée,
- les indices i, j, k du volume,
- l'indice du noeud de la composante de $\vec{\tau}$ correspondante,
- les noeuds de δ_0 (encadrant le noeud vectoriel).

III.4.7 Notations

a - Repère local

Autour d'un noeud choisi du maillage, il est intéressant de définir une notation locale (figure III.5) permettant de repérer :

- les six facettes du volume associé (deux dans chaque direction) avec les indices $i\alpha$, où i est le numéro de la direction de l'espace curviligne et α repère le côté d'observation :

$$\alpha \in \{-, +\}$$

- les six noeuds voisins les plus proches avec l'indice $i\alpha$, dans lequel on retrouve les notations précédentes.

b - Opérateur de somme

A partir de la notation définie précédemment, nous avons allégé la formulation, en adoptant la simplification suivante :

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{\alpha \in \{-,+\}} \equiv \sum_{i\alpha}$$

c - Dimensions utiles

Autour d'un noeud p du maillage, les grandeurs géométriques utiles sont notées comme suit :

- δl_p^i longueur du segment dans la direction curviligne η_i ,
- s_p^i aire de la facette normale à la direction η_i ,
- V_p valeur du volume de contrôle associé.

Les évaluations de ces grandeurs, qui nécessitent une intégration, sont données au paragraphe III.6.2.

III.5 SCHEMA DE DISCRETISATION

Compte tenu de la discrétisation de l'espace, les opérateurs différentiels s'expriment par leurs développements en séries de Taylor. Pour des raisons informatiques de stockage de l'information et de temps de calcul, il est indispensable de tronquer ces séries. Il est alors important de connaître l'ordre de grandeur de l'erreur ainsi commise afin d'évaluer la précision du résultat du calcul. Pour un ordre donné de troncature, différents schémas numériques peuvent être adoptés. Ils se distinguent par le choix de la position du pôle de décomposition en série de Taylor.

En ce qui concerne l'opérateur de transport convectif et diffusif, l'erreur

de troncature peut par exemple, permettre à l'information de remonter inopinément un courant. Cet artefact qui a tendance à surestimer la diffusion, est appelé diffusion numérique ou fausse diffusion. Pour limiter l'effet de ce phénomène numérique, de nombreux schémas de discrétisation ont été créés. L'analyse bibliographique qui suit nous a permis de faire un choix adapté à notre cas.

Pour un schéma de discrétisation spatiale du premier ordre de l'opérateur convectif, à une dimension, le coefficient de fausse diffusion est proportionnel /III.12/ :

- au module de la vitesse,
- à la dimension de la maille.

A deux dimensions, il est de plus proportionnel au sinus de deux fois l'angle que forme le vecteur avec l'axe suivant lequel l'opérateur est projeté (/III.9/ et /III.13/).

A trois dimensions, l'existence de trois angles complique le problème. Les écoulements étant généralement complexes, il est délicat de faire la part entre diffusion numérique et diffusion turbulente. De plus, les maillages tridimensionnels étant nécessairement plus grossiers pour des raisons de stockage et de temps de calcul, l'erreur est plus importante.

Des schémas d'ordre supérieur sont apparus, comme "QUICK" /III.14/, augmentant la précision de discrétisation, mais créant parfois des discontinuités non physiques /III.15/.

Le programme NSMAC de SAWADA /III.16/, qui utilise un schéma du troisième ordre sans grille décalée, calcule la pression à partir d'une équation de Poisson. NSMAC est précis et rapide mais présente quelques problèmes dans l'écriture des conditions aux limites.

Certains auteurs (/III.17 et /III.18/), ont proposé des schémas hybrides inconditionnellement stables. Leurs complexités, associées aux difficultés de mise en oeuvre des conditions aux limites, rendent l'utilisation de tels schémas très lourde.

Pour notre problème, où les conditions aux limites sont multiples et ont une topologie compliquée, il est indispensable de mettre en parallèle dilemme précision-stabilité et facilité de mise en oeuvre. Pour cela nous avons choisi un schéma hybride classique, qui traduit, que physiquement l'information arrive préférentiellement de l'amont.

Ce schéma est normalement centré d'ordre deux /III.9/ et fait intervenir le nombre de Péclet de maille, qui est le rapport des flux diffusif et convectif. Lorsque le nombre de Péclet est supérieur à deux, ce schéma n'est pas stable (/III.19/ et /III.20/). Un schéma d'ordre un, décentré amont, est alors utilisé. C'est ce schéma, qui pour les grands nombres de Peclet de maille, interdit à l'information de remonter le courant.

III.6 OPERATEURS DE CALCUL

La discrétisation de l'équation de transport, nécessite le calcul d'intégrales, de dérivées et d'interpolations de grandeurs. Les modèles numériques, associés à ces opérations sont présentés dans ce paragraphe.

III.6.1 Dérivation

Pour discrétiser l'opérateur de dérivation spatiale, les maillages décalés permettent l'utilisation aisée d'un schéma centré (dans le domaine de calcul) d'ordre deux (à condition que les facteurs d'échelles soient bien estimés). Avec un tel schéma numérique, par exemple, le gradient d'un scalaire, est estimé sur la grille des noeuds vectoriels. Le calcul à l'extérieur de cette grille est obtenu par interpolation.

Ainsi, dans l'équation de transport de la quantité de mouvement, on évalue aux noeuds intéressants, avec une précision satisfaisante, le terme, source, lié à la pression /III.10/.

A proximité des limites du domaine et des obstacles internes, ce schéma peut être modifié en fonction du modèle physique associé.

III.6.2 Intégration

L'intégration des équations de transport, fait apparaître des intégrales sur les volumes, les facettes et certains segments du maillage. Pour estimer ces intégrales, le théorème de la valeur centrale est utilisé (dans le domaine de calcul).

L'intégrale d'une grandeur sur un segment (respectivement une facette ou un volume), est ainsi estimée par le simple produit de la valeur de la variable au centre du segment (de la facette, du volume) par sa longueur (son aire, son volume).

Comme pour l'opérateur de dérivation, le modèle d'intégration peut être modifié à proximité des limites du domaine et des obstacles internes.

Les longueurs, aires et volumes sont approchés à l'aide du même théorème. Leurs expressions s'écrivent :

$$\delta l_p^i \approx h_p^i \delta \eta_i$$

$$V_p \approx \delta l_p^1 \delta l_p^2 \delta l_p^3$$

$$\delta_p^i \approx V_p / \delta l_p^i$$

III.6.3 Interpolation

L'estimation de certains coefficients des équations de transport, nécessite le calcul de grandeurs, en dehors du réseau de noeuds où elles sont définies. On procède par interpolation linéaire dans le domaine de calcul.

Il apparait trois cas de figures selon la position du point d'interpolation :

- i - le point est au centre d'un segment limité par deux noeuds où la variable est connue,

- ii - le point est au centre d'un rectangle, dont les sommets sont des noeuds, où la variable est connue,
- iii - le point est le centre d'un parallélépipède rectangle, dont les sommets sont des noeuds, où la variable est connue.

Finalement, l'interpolation revient à faire une moyenne sur les deux, quatre ou huit valeurs de la variable aux noeuds des sommets.

La présence d'obstacles et des conditions aux limites du domaine peut localement modifier l'expression de cette fonction.

III.7 DISCRETISATION DU SYSTEME DIFFERENTIEL

L'algorithme, nous l'avons vu, résout successivement les équations de transport et l'équation de conservation de la masse, avec un traitement particulier pour cette dernière.

La méthode des volumes finis, nous l'avons vu aussi, consiste dans l'intégration des équations sur les volumes du maillage, pour obtenir un système linéaire.

Le calcul des coefficients de ce système ne présente pas de difficulté particulière. Il est néanmoins fastidieux, c'est pourquoi, dans ce paragraphe, nous ne présentons que brièvement la méthode qui nous permet de les obtenir (une description plus détaillée est fournie en annexe II).

III.7.1 Equation de transport

Le caractère elliptique de cette équation, la topologie du maillage (grille) et le schéma de discrétisation (hybride, centré du deuxième ordre, décentré du premier ordre), expliquent pourquoi nous pouvons relier un noeud à ses six plus proches voisins (deux dans chaque direction du domaine de calcul).

Dans ces conditions, en adoptant la numérotation locale, les équations du système linéaire obtenu de la discrétisation de l'équation de transport, peuvent s'écrire:

$$\sum_{i\alpha} A_{i\alpha} \phi_{i\alpha\alpha} - A_p \phi_p + SU = 0 \quad (15)$$

Pour effectuer le calcul des coefficients du système linéaire, chacun des opérateurs de l'équation de transport est mis sous la forme linéaire suivante :

i - pour l'opérateur convectif :

$$\int_{V_p} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial \eta_i} \left(\frac{h}{h_i} \lambda_{\phi}^c \rho U^i \phi \right) dv \approx \frac{1}{2} \left(\sum_{i\alpha} C_{i\alpha} \phi_{i\alpha\alpha} - C_p \phi_p \right) \quad (16)$$

où C_p qui représente le défaut de masse de l'itération précédente s'écrit :

$$C_p = - \sum_{i\alpha} C_{i\alpha} \quad (17)$$

ii - pour l'opérateur diffusif :

$$\int_{V_p} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial \eta_i} \left(\frac{h}{h_i} \lambda_{\phi}^d \frac{\partial \phi}{\partial \eta_i} \right) dv \approx \sum_{i\alpha} D_{i\alpha} \phi_{i\alpha\alpha} - D_p \phi_p \quad (18)$$

où D_p s'exprime par :

$$D_p = \sum_{i\alpha} D_{i\alpha} \quad (19)$$

iii - pour le terme source :

$$\int_{V_p} -h S \phi dv \approx -S_p \phi_p + SU \quad (20)$$

Avec le schéma de discrétisation choisi, l'assemblage des coefficients du système linéaire est réalisé de la manière suivante :

si $Pe < 2$, schéma centré d'ordre deux :

$$A_{i\alpha} = \frac{1}{2} C_{i\alpha} - D_{i\alpha} \quad (21)$$

si $Pe \geq 2$, schéma décentré amont d'ordre un :

$$A_{i\alpha} = \frac{1}{2} (C_{i\alpha} - |C_{i\alpha}|) \quad (22)$$

où Pe est le nombre de Péclet de maille qui s'exprime :

$$Pe = \frac{|U^i| \delta l_p^i}{\nu_e} \quad (23)$$

Dans l'équation (15), le pivot A_p s'écrit :

$$A_p = \sum_{i\alpha} A_{i\alpha} + SP + 2 C_p \quad (24)$$

où, dans le coefficient spécial, sont regroupés les termes de courbure, de manière à augmenter la valeur du pivot. Ainsi, d'après le critère de SCARBOROUGH (dit "de la diagonale dominante"), nous assurons une bonne convergence de la résolution du système linéaire par la méthode de Gauss-Seidel.

III.7.2 Traitement de la pression

a - Coefficient de correction de vitesse et correction de vitesse

Les équations associées à chacune des composantes de la vitesse sont discrétisées successivement. Les équations du système linéaire ainsi obtenues s'écrivent :

$$\sum_{i\alpha} A_{i\alpha}^j U_{i\alpha}^j - A_p^j U_p^j + SU^j = 0 \quad (25)$$

où l'exposant j repère la direction de la composante traitée.

Le terme source SU^j , qui contient le terme de pression peut être décomposé ainsi :

$$S U_j \approx \frac{V_p}{h_p^j} \left(\frac{\partial p}{\partial \eta_j} \right)_p + S U_j' \quad (26)$$

Le coefficient de correction de vitesse s'écrit alors (cf. équation (9) du §.III.2) :

$$\frac{\partial U_p^j}{\partial \left(\frac{\partial p}{\partial \eta_j} \right)} \approx - \frac{V_p}{h_p^j A_p^j} \quad (27)$$

Au premier ordre, la correction de vitesse, est reliée au champ de correction de pression par :

$$\delta U_p^j \approx - \frac{V_p}{\delta l_p^j A_p^j} (\delta p_{j+} - \delta p_{j-}) \quad (28)$$

où δp_{j+} et δp_{j-} désignent les corrections de pression aux deux noeuds scalaires encadrant le pôle vectoriel.

b - Correction de pression

L'intégration sur un volume scalaire, de l'équation de conservation de la masse, permet d'obtenir :

$$\sum_{j\alpha} \alpha \rho_{j\alpha} U_{j\alpha}^j S_{j\alpha}^j \approx 0 \quad (29)$$

On écrit alors, que la vitesse est la somme de la vitesse solution de l'équation de quantité de mouvement et d'une correction de vitesse.

$$U_{j\alpha}^j = U_{j\alpha}^{j*} + \delta U_{j\alpha}^j \quad (30)$$

Avec (28) et (29), on obtient finalement un système linéaire du même type que pour l'équation de transport. Les coefficients des équations de ce système s'écrivent :

$$A_{j\alpha} = \rho_{j\alpha} \frac{V_{j\alpha}}{\delta l_{j\alpha} A_{j\alpha}} S_{j\alpha}^j \quad (31)$$

$$SP = 0 \quad (32)$$

$$SU = \sum_{j\alpha} \alpha \rho_{j\alpha} U_{j\alpha}^* S_{j\alpha}^j \quad (33)$$

III.7.3 Conditions aux limites et obstacles internes

Nous l'avons vu, les volumes affectés par les limites du domaine ou les obstacles, sont regroupés en régions de traitement. Pour les volumes de ces régions, il s'agit de modifier la formulation des coefficients du système linéaire. Le nombre de types de traitement est grand, c'est pourquoi nous ne les détaillons pas dans ce paragraphe mais en annexe III. Contentons nous d'énumérer les modèles disponibles dans CEPHISE.

Modèles hydrauliques :

- Frottements nuls sans flux (composante normale imposée nulle, autres variables : Neuman homogène),
- Dirichlet (Vitesse, k et ε imposées),
- Direction de la vitesse imposée (la répartition est uniforme sur la région, la norme assure la conservation de la masse),
- Loi de paroi étanche et fixe (loi de couches limites hydrauliques : loi logarithmique)
- Loi de paroi poreuse et/ou défilante (loi de couche limite avec changement de repère),
- Tissu filtre poreux (lois de couches limites de part et d'autre du tissu, loi d'écoulement poreux),
- Tissu étanche (lois de couches limites de part et d'autre du tissu).

Modèles thermiques :

- Neuman (flux thermique imposé),
- Dirichlet (température imposée),
- loi de paroi étanche à température imposée (loi de couches limites thermiques),
- loi de paroi poreuse à température imposée (loi de couches limites avec changement de repère),
- loi de paroi et coefficient d'échange thermique avec l'extérieur.

A cette liste, correspondant aux besoins de cette étude, s'ajoutent des modèles développés et utilisés par d'autres chercheurs du laboratoire :

- comportement thermocapillaire,
- tache thermique Gaussienne (impact laser),
- condition de pression,
- échange avec l'extérieur par rayonnement.

Pour l'ensemble de ces modèles, il existe un type de traitement. De plus, pour les modèles hydrauliques, compte tenu du décalage des grilles, s'ajoutent les cas particuliers présentés au paragraphe III.4.6.

III.8 PROGRAMMATION

La programmation d'un code de calcul, est une part importante du travail de développement, mais ne présente pas de difficulté majeure. Toutefois, de la qualité de ce travail, dépend la fiabilité, la souplesse d'utilisation et l'évolutivité du code. Dans ce paragraphe, nous faisons un bref exposé sur la construction du code CEPHISE et de ses outils périphériques.

III.8.1 Généralités

a - Langage de programmation

Nous avons choisi le langage Fortran pour les raisons exposées ci-après :

- i - Le Fortran est un langage facilement accessible, qui est pratiqué par de

nombreux chercheurs. Son utilisation favorise donc l'évolutivité du programme.

ii - Certaines procédures du code E.T. développé en Fortran par M. BURTY à MADYLAM ont été réutilisées.

iii - Les interpréteurs Fortran, qui bénéficient de l'ancienneté du langage, génèrent des codes plus rapides, que ceux issus des langages plus récents et plus évolués.

b - Portabilité

Le matériel informatique évoluant très rapidement, la programmation d'un code ne doit pas être liée à une machine particulière sous peine d'en écourter la durée de vie. C'est avec ce souci de portabilité que CEPHISE a été construit. C'est pourquoi, nous nous sommes efforcés d'utiliser le Fortran standard à l'exclusion de toutes extensions proposées par certains constructeurs de matériel informatique.

Ainsi, notre code fonctionne aussi bien sur des machines de type Apollo, Alliant que Sun.

c - Gestion de la mémoire

Pour donner une grande souplesse d'utilisation au code, il est intéressant de laisser certains paramètres totalement libres, comme par exemple : le nombre de régions ou les nombres de mailles suivant chacune des directions de l'espace de calcul. Ceci nécessite une allocation dynamique de mémoire, ce qui n'est pas possible en Fortran. Nous avons contourné ce problème en utilisant la bibliothèque Fortran de gestion dynamique de mémoire GESMEM de CAOIB, qui simule l'allocation dynamique de la mémoire. Il reste toutefois d'anciennes procédures, dont la programmation n'a pas été revue, qui amoindrissent l'efficacité de cette démarche.

d - Préprocesseur

L'entrée des données est une étape cruciale durant laquelle il est trop souvent facile de faire des erreurs. Il est important, pour la fiabilité des résultats, que la description des problèmes soit aisée, avec, autant que possible, des garde-fous.

Pendant toute l'étape de développement du code, nous nous sommes contentés de rentrer directement les données dans des fichiers formatés, lisibles par CEPHISE. Cette méthode étant trop délicate pour les néophytes, nous avons délégué la programmation d'un préprocesseur, à Ch. AVARE chercheur à MADYLAM.

e - Postprocesseur

Très tôt dans l'utilisation du code, nous nous sommes rendus compte du caractère indispensable d'un postprocesseur graphique tridimensionnel. C'est pourquoi, nous avons construit un programme d'exploitation des résultats de CEPHISE. Ce programme écrit en Fortran standard, fait appel à une bibliothèque graphique 3-D développée par Y. DUTERRAIL ingénieur informaticien à MADYLAM. Il est largement interactif et totalement programmé en gestion dynamique de mémoire. Ce programme fonctionne sur des stations Sun et Apollo.

f - Interface FLUX-EXPERT / CEPHISE

Depuis l'apparition de la MagnétoHydroDynamique (MHD), les problèmes de mécanique des fluides sont de plus en plus fréquemment couplés à des problèmes d'électromagnétisme ou d'électrocinétique. Il s'agit alors de coupler les équations de MAXWELL, aux équations de NAVIER-STOKES. Pour résoudre les premières, la méthode des éléments finis est particulièrement bien adaptée, par contre, la méthode des volumes finis donne de meilleurs résultats pour la mécanique des fluides. C'est la raison pour laquelle, il est apparu intéressant de réaliser une interface entre CEPHISE et FLUX-EXPERT qui est un logiciel industriel, multi-équation, utilisant la méthode de éléments finis. Ce travail en cours, est réalisé par Ch. TROPHIME chercheur à MADYLAM.

g - Volume

L'ensemble des bibliothèques de CEPHISE compte plus de 900 procédures Fortran, pour environ 70 000 lignes de programmation.

III.8.2 Structure de données et architecture du code

L'efficacité d'un code de calcul est fortement liée à l'organisation du

Nombre de noeuds	Stations SUN	Serveur SUN	Stations Apollo	Calculateur Alliant
10 x 15 x 20	4 heures	2 heures	10 heures	-----
20 x 20 x 30	12 heures	7 heures	30 heures	9 heures
30 x 30 x 30	----	25 heures	----	48 heures

- Figure III.6 -
Quelques temps de calcul

stockage de l'information. Pour la programmation de CEPHISE, nous avons porté un intérêt particulier à la structure des données relatives aux conditions aux limites et aux obstacles internes.

Par ailleurs, l'architecture de la programmation peut permettre l'évolution plus ou moins aisée du code. Nous avons tenté de construire CEPHISE de façon à faciliter l'implantation de nouveaux modèles de comportement aux limites ou au voisinage des obstacles internes.

III.8.3 Temps de calcul

Il est impératif que les temps de calcul restent dans une plage acceptable à l'échelle humaine. Ceci dépend, d'une part, des performances du support informatique (rapidité de calcul, capacité en mémoire centrale) et d'autre part, de la programmation. Le code CEPHISE a été principalement développé sur des stations APOLLO du type DN3000, dont la taille de la mémoire centrale n'excède pas 4Mo. Les calculs ont été en grande partie effectués sur un mini-processeur vectoriel FX/4 doté de 24 Mo de mémoire centrale. Par la suite, le laboratoire s'est équipé de stations et d'un serveur de marque SUN ayant une capacité en mémoire centrale de 128 Mo. Avec ce dernier, la programmation de CEPHISE, économe en mémoire, n'est plus optimale.

A titre indicatif, des temps de calcul sont fournis dans le tableau de la figure III.6.

III.9 VALIDATION

Afin de tester CEPHISE, nous avons réalisé plusieurs calculs dans des configurations admettant des solutions analytiques simples. Pour ces calculs, dont la liste est fournie ci-après, les résultats sont corrects et n'ont pas permis de mettre le code en défaut.

i - Test du noyau laminaire

Pour une conduite de section circulaire, nous forçons un profil de vitesse uniforme en entrée. Le mode laminaire est obtenu en imposant une viscosité

constante donnée. Pour des nombres de Reynolds de faible valeur, nous contrôlons, qu'à une certaine distance des extrémités de la conduite, le profil est parabolique.

ii - Test de Batchelor

Ce test s'appuie sur le fait, que dans une région bidimensionnelle, s'il n'y a pas de force de volume alors la vorticité est uniforme /III.23/. Nous réalisons ce test dans une boîte rectangulaire fermée avec des forces de volume confinées sur les frontières du domaine. Ce test est intéressant car il permet de valider les traitements des opérateurs de diffusion et de convection.

iii - Test de la force irrotationnelle

Dans une boîte close, on impose une force irrotationnelle ($f_x=0$; $f_y=0$; $f_z=\rho g$). Les calculs sont réalisés avec un champ de vitesse non nul en initialisation dans une géométrie curviligne avec présence d'obstacles étanches et poreux. A la convergence, les vitesses sont nulles et le champ de pression est réparti suivant la loi $p = p_0 + \rho g (z - z_0)$.

iv - Test de la diffusion thermique

En l'absence de mouvement, nous calculons la diffusion thermique à partir d'un point chaud dans une géométrie tridimensionnelle quasi infinie (à l'échelle des dimensions du point chaud). Ce test réalisé avec un maillage curviligne, permet de retrouver la décroissance thermique en $1/r$ (r : distance du point courant au point chaud).

Du point de vue expérimentale, nous verrons au §.V que les mesures du champ thermique, dans le cas de la coulée d'aluminium, se corrélaient bien avec les résultats numériques obtenus par CEPHISE. De plus, nous vérifions la bonne cohérence interne du logiciel en traitant un même problème avec deux maillages curvilignes topologiquement différents.

Par ailleurs, le domaine d'application de CEPHISE étant assez général, d'autres études ont pu révéler de bonnes correspondances entre les résultats

donnés par CEPHISE et des résultats expérimentaux. (/III.21/ et /III.22/).

III.10 CRITIQUES

CEPHISE, utilisé dans le cadre de plusieurs études, donne des résultats intéressants. Nous sommes toutefois conscients des limites de ce code, c'est pourquoi, nous avons essayé d'en faire une critique objective. Nous livrons dans ce paragraphe, les points les plus importants de cette analyse.

Du point de vue de la méthode, celle des volumes finis est certainement l'une des plus performantes quant à la résolution des équations de Naviers-Stokes et des équations de transport de contaminants, mais c'est la manière dont CEPHISE l'utilise, qui peut être efficacement améliorée. Les propositions exposées ci-après, sont indépendantes.

III.10.1 Transformation curviligne (maillage)

a - Domaine de calcul

Dans CEPHISE, le domaine de calcul se limite au cube unitaire. Pour certaines géométries, mêmes simples, une telle contrainte, demande l'utilisation de maillages fortement curvilignes (Figure III.7). Afin d'éviter ceci, nous proposons deux palliatifs :

- i - l'utilisation de domaines de calcul déstructurés,
- ii - l'utilisation de domaines de calcul issus de la juxtaposition de plusieurs sous-domaines rectangulaires.

Cette dernière proposition est certainement la moins judicieuse, car elle nécessite le couplage entre les différents sous-domaines, ce qui pénalise certainement la convergence des calculs. Par contre, la première proposition qui n'est qu'une simple restructuration du code, n'entraîne que des problèmes de génie logiciel de faible difficulté.



- Figure III.7 -
Deux possibilités de maillage d'une géométrie simple

b - Orthogonalité

Les transformations curvilignes orthogonales utilisées dans CEPHISE sont, pour certaines géométries, des contraintes qui rendent l'obtention du maillage impossible. Pour les supprimer, tout en conservant l'avantage de l'orthogonalité, nous proposons l'utilisation de maillages mixtes. De tels maillages devraient être orthogonaux au voisinage des limites du domaine et des obstacles internes. Partout ailleurs ces maillages pourraient être quelconques. La mise en pratique de cette proposition nécessite au préalable une étude, permettant de formuler les équations en coordonnées curvilignes non-orthogonales.

III.10.2 Structure de l'information

En ce qui concerne les conditions aux limites et les obstacles internes, les facettes des volumes concernés, sont rassemblées dans des listes de traitement homogène. Pour les composantes de la vitesse, il existe des traitements hybrides. Avec une telle structure, l'ajout d'un nouveau modèle de conditions aux limites est délicat. En effet, il est nécessaire, pour ce nouveau modèle, de prévoir son voisinage avec tous les modèles plus anciens. Pour diminuer cette difficulté qui pénalise l'évolutivité du logiciel, nous préconisons l'utilisation de listes de demi-facettes.

CHAPITRE IV

**Mesure du coefficient de perte
de charge hydraulique**

CHAPITRE IV

Mesure du coefficient de perte de charge hydraulique

IV.1 GENERALITES

Il s'agit de déterminer expérimentalement la loi hydraulique de perte de charge d'un écoulement d'aluminium liquide au travers d'un tissu.

La périodicité géométrique du tissage associée au grand nombre de mailles permet d'assimiler la dimension des mailles à l'échelle microscopique d'un problème d'homogénéisation.

Le tissu agit sur le mouvement du fluide en transformant une partie de son énergie mécanique sous forme de chaleur :

i - dans le cas où l'écoulement de maille est laminaire, une partie de l'énergie cinétique du fluide est dissipée au niveau des contractions et des élargissements successifs de la veine fluide,

ii - pour les écoulements de maille turbulents, le transfert d'énergie cinétique des grandes structures vers les plus petites structures tourbillonnaires est accentué par la présence du tissu,

iii - en outre, quelque soit le type d'écoulement, une quantité d'énergie se dégrade par frottement du fluide contre les parois de la maille.

La perte moyenne d'énergie du fluide lors de la traversée du tissu se traduit par une perte moyenne de pression. En grandeur adimensionnelle, cette perte de pression est représentée par le coefficient de perte de charge dont l'expression est :

$$\zeta = \frac{\delta p}{\rho \frac{V_d^2}{2}} \quad (1)$$

avec δp : perte moyenne de pression au passage du tissu,
 ρ : densité du fluide,
 V_d : vitesse débitante.

IV.2 PARAMETRES DE L'ECOULEMENT

Compte tenu des remarques du paragraphe précédent, le nombre de Reynolds pertinent est celui calculé à partir de l'échelle de maille du tissu.

$$Re^* = \frac{V_d \delta}{\nu} \quad (2)$$

V_d : vitesse débitante,
 δ : diamètre moyen du fil du tissu,
 ν : viscosité moléculaire du fluide.

L'étranglement de la veine fluide dans la maille est quantifié par le taux de vide τ_v du tissu.

$$\tau_v = s'/s \quad (3)$$

avec s' : aire de la section libre de la maille,
 s : aire de la maille.

Outre le taux de vide du filtre, sa texture lui confère une plus ou moins grande aptitude à générer de petites structures tourbillonnaires.

En résumé, la loi recherchée est paramétrée par :

- Re^* le nombre de Reynolds de maille,
- τ_v le taux de vide du tissu,
- la texture du tissu.

IV.3 PLAGES D'ETUDE

L'ensemble des paramètres de l'écoulement peut être scindé en trois sous-groupes se rattachant au métal liquide, au tissu ou au débit.

IV.3.1 Paramètre lié au métal liquide

C'est la viscosité de l'aluminium liquide qui naturellement est fortement liée à la température. Pour le cas étudié, le métal est à une température comprise entre 10 et 50 °K de surchauffe, ce qui correspond à une plage de viscosité de :

$$0,5 \cdot 10^{-6} \leq \nu \leq 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

IV.3.2 Paramètres liés au tissu

Compte tenu de l'étendue de la panoplie de tissus disponibles, une étude exhaustive dans le cadre de la présente recherche n'est pas envisageable. Le choix a été de se limiter à quelques tissus fréquemment utilisés afin de mettre au point une méthode d'estimation de la loi de perte de charge.

Ces tissus ont des taux de vide de l'ordre de 30 à 60 %. Le diamètre du fil de tissage est de l'ordre du millimètre. La texture est de type maille carrée ou rectangulaire unie.

IV.3.3 Paramètre du débit

C'est la vitesse débitante de maille V_d qui est majorée par la vitesse d'injection du métal. La valeur moyenne de la vitesse débitante, $V_{d \text{ moy}}$, est estimée à partir du débit d'injection et de la section totale de tissu traversé.

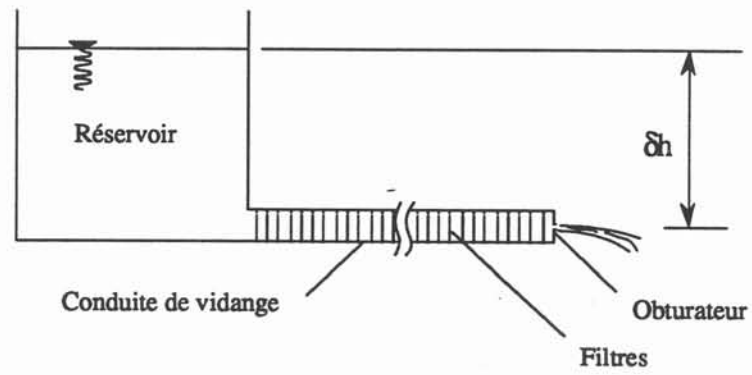
Dans les configurations actuellement utilisées, la vitesse d'injection est de l'ordre de 0,3 m/s et la vitesse moyenne débitante est comprise suivant les cas dans la plage

$$2 \text{ mm/s} \leq V_d \leq 200 \text{ mm/s}$$

IV.3.4 Récapitulatif

De l'ensemble des remarques des trois paragraphes précédents, pour les tissus retenus, on déduit la plage d'étude du nombre de Reynolds de maille :

$$1 \leq Re^* \leq 100$$



- Figure IV.1 -
Principe expérimental.

IV.4 ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

IV.4.1 Résultats expérimentaux

IDEL'CIK /IV.1/ présente des résultats expérimentaux de coefficients de perte de charge pour différents tissus métalliques ou de fils de soie ayant des textures assez proches de celles des tissus couramment utilisés. Ces expérimentations sont réalisées avec de l'eau et pour des nombres de Reynolds de maille compris entre 50 et 300.

Ces résultats ne recouvrant pas entièrement la plage de Reynolds étudiée, ils ne sont pas totalement suffisants.

IV.4.2 Modèle à pores cylindriques

L'idée de B. BRUCHNER /IV.2/ était de supposer que le tissu se comporte hydrauliquement comme une plaque perforée dont l'épaisseur et le diamètre des pores se déduisent des paramètres géométriques de la maille du tissu. Cette hypothèse, si elle est certainement vérifiée pour les grands nombres de Reynolds de maille, est à coup sûr fausse pour les faibles Reynolds. C'est la raison pour laquelle, ces résultats n'ont pas été exploités.

IV.5 PRINCIPE EXPERIMENTAL

L'idée consiste dans la comparaison de vidanges successives d'un même réservoir à travers des batteries de filtres dont on peut faire varier le nombre.

Au bas du réservoir (figure IV.1) est connecté un tronçon de conduite de vidange à l'intérieur duquel sont disposés les filtres. Au débouché de cette conduite, un obturateur étrangle l'écoulement, assurant ainsi la mise en charge de la totalité des filtres.

Pour que les résultats soient obtenus avec la meilleure précision, trois conditions doivent être vérifiées :

- la vidange est supposée quasi-statique,
- pour assurer une bonne périodicité géométrique des écoulements de maille,

les frottements pariétaux dans la conduite doivent être négligeables face aux pertes de charges dans les filtres, d'où la nécessité d'utiliser de grands diamètres de conduite pour assurer cette condition,

- la distance entre deux filtres consécutifs est prise suffisamment grande pour que le sillage de l'un n'interfère pas avec l'écoulement de l'autre.

Ces conditions étant remplies, la connaissance de la hauteur initiale dans le réservoir et l'enregistrement de l'évolution du poids de liquide vidangé donnent la relation entre le coefficient de perte de charge de la vidange et le nombre de Reynolds de maille.

Nous définissons les grandeurs suivantes :

Caractéristiques du fluide

ρ : densité

ν : viscosité moléculaire

Caractéristiques de l'installation

S_{conduite} : section de la conduite

$S_{\text{réservoir}}$: section du réservoir

Caractéristique du filtre

δ : diamètre moyen du fil

Grandeurs mesurées

$M(t)$: masse de liquide vidangé, enregistrée au cours du temps

δh_0 : hauteur initiale de liquide dans le réservoir

Grandeurs intermédiaires

$\mathcal{V}(t)$: volume de liquide vidangé, défini comme :

$$\mathcal{V}(t) : \frac{M(t)}{\rho} \quad (4)$$

$V_d(t)$: vitesse débitante dans la conduite qui s'exprime :

$$V_d(t) = \frac{\dot{\mathcal{V}}(t)}{S_{\text{conduite}}} \quad (5)$$

$\delta h(t)$: hauteur de liquide dans le réservoir, défini par :

$$\delta h(t) = \delta h_0 - \frac{V(t)}{S_{\text{réservoir}}} \quad (6)$$

$\delta p_{\text{vidange}}(t)$: pression hydrostatique

$$\delta p(t) = \rho g \delta h(t) \quad (7)$$

Grandeurs finales adimensionnelles

$Re^*(t)$: Reynolds de maille

$$Re^*(t) = \frac{V_d(t) \delta}{\nu} \quad (8)$$

$\zeta_{\text{vidange}}(t)$ = coefficient de perte de charge de la vidange

$$\zeta_{\text{vidange}}(t) = \frac{\delta p_{\text{vidange}}(t)}{\rho \frac{V_d^2(t)}{2}} = \zeta_{\text{vidange}}(Re^*) \quad (9)$$

L'inertie du fluide étant négligée, la pression hydrostatique (7) est supposée équilibrée par les différentes pertes de charge qui sont :

i - les sauts de pression dus au passage des n filtres,

$$\Delta p_{\text{filtres}} = n \delta p_{\text{filtre}} \quad (10)$$

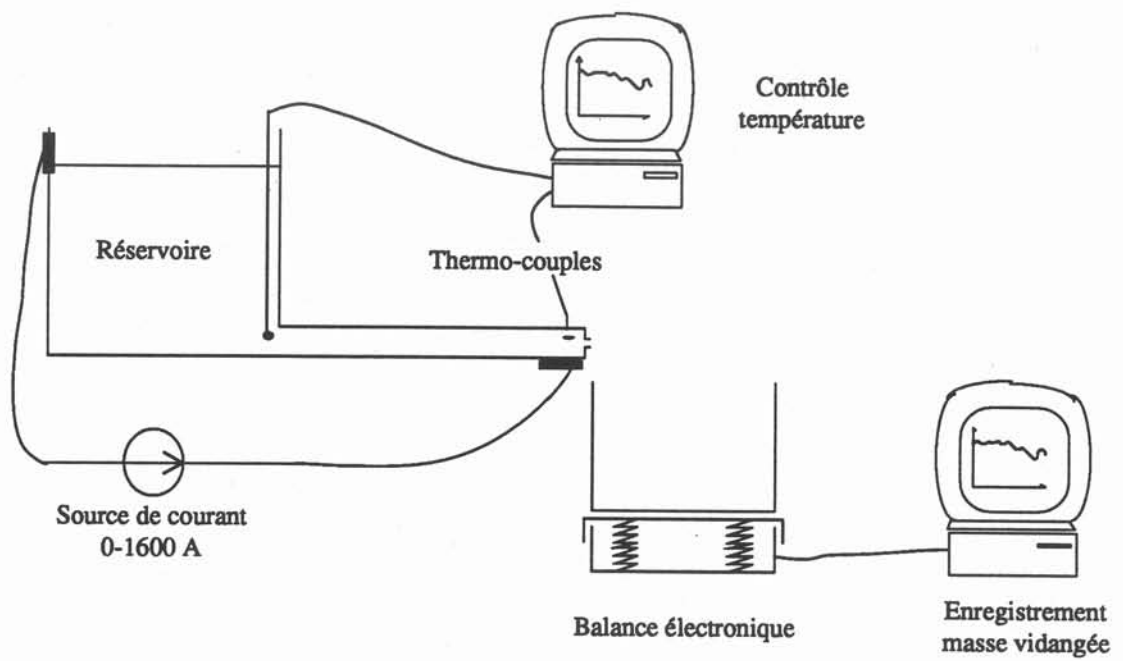
ii - les frottements pariétaux dans la conduite et le réservoir : $\delta p_{\text{pariétal}}$,

iii - les étranglements de l'écoulement à l'entrée de la conduite et à l'obturateur : $\delta p_{\text{étranglements}}$,

On en déduit la perte de charge totale :

$$\delta p_{\text{vidange}} = n \delta p_{\text{filtre}} + \delta p_{\text{pariétal}} + \delta p_{\text{étranglements}} \quad (11)$$

Le coefficient de perte de charge totale est obtenu par la somme des coefficients partiels :



- Figure IV.2 -
Schéma de l'installation

$$\zeta_{\text{vidange}} = n \zeta_{\text{filtre}} + \zeta_{\text{pariétal}} + \zeta_{\text{étranglements}} \quad (12)$$

$$\text{avec } \zeta_{\alpha} = \frac{\delta p_{\alpha}}{\rho \frac{V_d^2}{2}} \quad (13)$$

$$\alpha \in \{ \text{Vidange, filtre, pariétal, étranglements} \}$$

Deux vidanges sont réalisées, l'une avec un grand nombre de filtres (vidange "en charge") et l'autre avec un nombre réduit de filtres (vidange "à vide"). Pour ces deux vidanges, à Reynolds de maille constant, les pertes de charge dues aux frottements pariétaux et aux étranglements peuvent être supposées identiques, moyennant quelques précautions :

i - Pour que l'écoulement à proximité des étranglements situés aux extrémités de la conduite soient inchangés, on conserve la position des premier et dernier filtres.

ii - En ce qui concerne les frottements pariétaux, ils sont essentiellement confinés aux parois de la conduite et directement liés au profil de vitesse. En s'assurant qu'il n'y ait pas de trop longs tronçons de conduite sans filtre pour la vidange à vide, on reproduit avec la meilleure fidélité ces frottements pariétaux.

Ces précautions étant prises, la comparaison des deux vidanges permet d'extraire les pertes de charges dues à la présence des filtres. L'expression du coefficient associé au tissu peut alors s'écrire :

$$\zeta_{\text{filtre}} (\mathcal{R} e^*) = \frac{\zeta_1 (\mathcal{R} e^*) - \zeta_2 (\mathcal{R} e^*)}{n_1 - n_2} \quad (14)$$

$\zeta_1 (\mathcal{R} e^*)$: coefficient de perte de charge de la vidange "en charge",

n_1 : nombre de filtres de la vidange "en charge",

$\zeta_2 (\mathcal{R} e^*)$: coefficient de perte de charge de la vidange "à vide",

n_2 : nombre de filtres de la vidange "à vide".

IV.6 DESCRIPTION DE L'INSTALLATION

Pour estimer au mieux l'effet du métal chaud sur les tissus, l'installation (figure IV.2) a été prévue pour fonctionner en aluminium liquide.

La fusion du métal est obtenue par un four à induction. Le métal est ensuite transvasé dans le réservoir.

Pour obtenir une température la plus constante possible durant la vidange, avant le remplissage, l'installation largement calorifugée est préchauffée par effet Joule jusqu'à ce qu'elle atteigne une température voisine de celle du métal liquide. Les importants courants (1600 Ampères) de chauffage circulent dans les parties métalliques du réservoir et de la conduite. Pour éviter des perturbations d'origine magnétohydrodynamique, ils sont interrompus pendant la durée de la vidange.

Une centrale d'acquisition reliée à des thermocouples positionnés aux extrémités de la conduite permet d'enregistrer l'évolution de la température du métal liquide pendant la vidange.

La mesure de la masse de métal vidangé est effectuée par une balance électronique. Un micro-ordinateur cadence et enregistre les mesures à la fréquence de une mesure par seconde.

IV.7 RESULTATS

Deux tissus Pon 650 et Pon 618 ont principalement été caractérisés. Pour chacun d'entre eux, des mesures en aluminium liquide et en eau ont été réalisés et comparés.

IV.7.1 Tissu Pon 650

Le tissu Pon 650 est à mailles carrées, le diamètre de ces fils est de 0,76 mm pour un taux de vide de 45 %.

Les résultats obtenus en aluminium liquide (figure IV.3) comparés à ceux obtenus en eau (figure IV.4) présentent une bonne corrélation (figure IV.5).

Sur les graphes, on distingue deux zones :

i- $Re^* < 100$

Pour ces faibles nombres de Reynolds de mailles, les mesures sont réparties

autour d'une droite de pente - 1 qui indique que les forces visqueuses sont prédominantes.

ii - $Re^* > 100$

Pour les grands nombres de Reynolds de maille, la pente est nulle. Ce résultat était prévisible ; en effet, les forces d'inertie sont dans ce cas dominantes.

IV.7.2 Tissu Pon 618

Les caractéristiques de ce tissu sont les suivantes :

Diamètre du fil : 0,70 mm

Taux de vide : 23 %

Pour ce tissu, une seule paire de vidanges a été réalisée en aluminium liquide (figure IV.6). Les résultats en eau (figure IV.7) sont superposés à ceux en métal chaud sur la figure IV.8.

Pour les grands nombres de Reynolds de maille, les résultats sont très concentrés. Par contre, pour les plus faibles nombres de Reynolds, on constate une très forte dispersion des résultats qui semblent s'organiser autour de trois régimes. L'observation de ces régimes pourrait être la conséquence d'instabilités de l'écoulement.

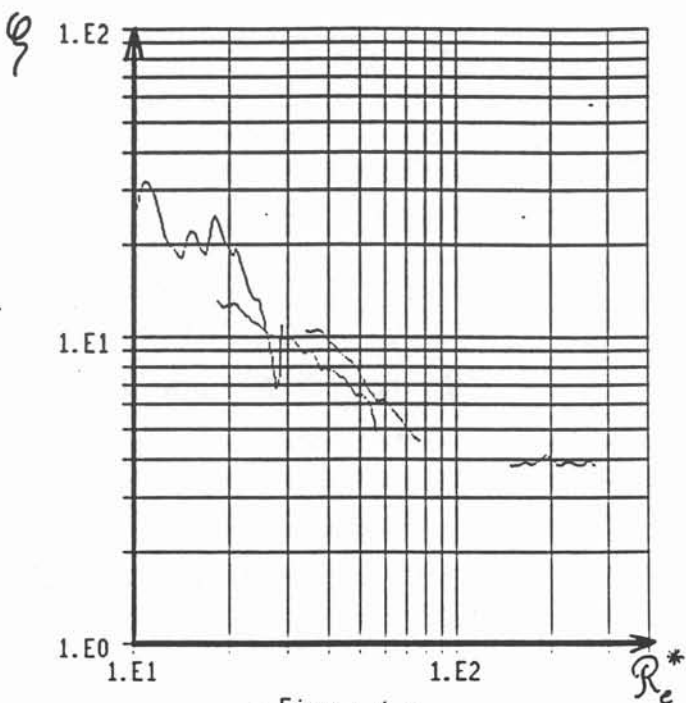
IV.8 - CONCLUSION PARTIELLE

La méthode bien adaptée pour les grands nombres de Reynolds de maille est dans certains cas mis en défaut pour les faibles nombres de Reynolds. Les résultats obtenus en eau et en aluminium étant dans tous les cas bien corrélés, le vieillissement des tissus dans le métal chaud, ainsi que les effets de mouillabilité ou de tension superficielle, apparaissent négligeables. Une installation mieux adaptée aux vidanges en eau permettrait certainement de mieux analyser les phénomènes mis en jeu. Par exemple, une conduite de matière transparente pourrait permettre de visualiser les écoulements et de conclure avec certitude sur les hypothétiques instabilités de régime du paragraphe IV.7.2. Des mesures à hauteur d'eau constante donneraient des résultats avec une précision accrue.

PON 650

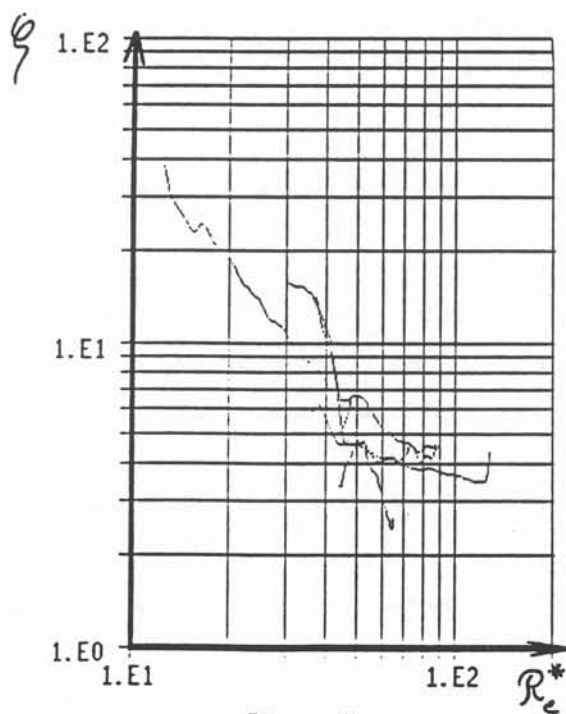
Taux de vide : 45 %

Diametre du fil : 0.76 mm



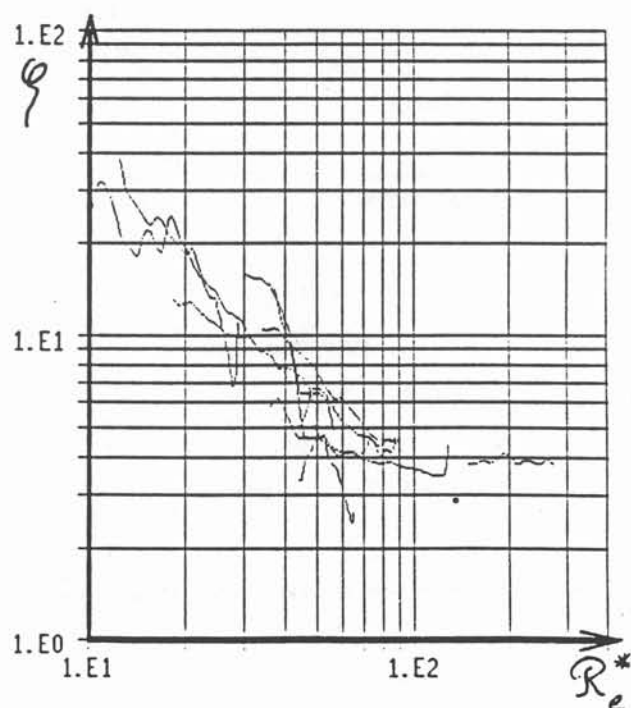
- Figure 4 -

Resultats de mesures en aluminium liquide



- Figure 3 -

Resultats de mesures en eau



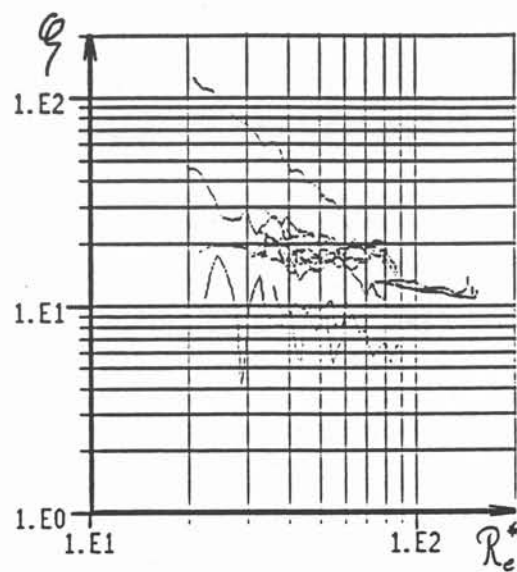
- Figure 5 -

Resultats eau et aluminium superposes

PON 618

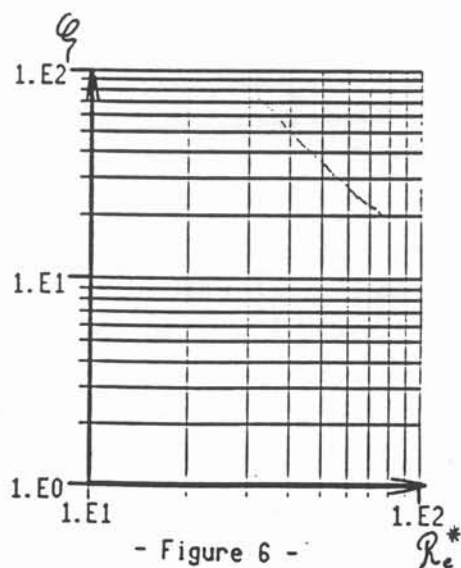
Taux de vide : 23 %

Diametre du fil : 0.70 mm



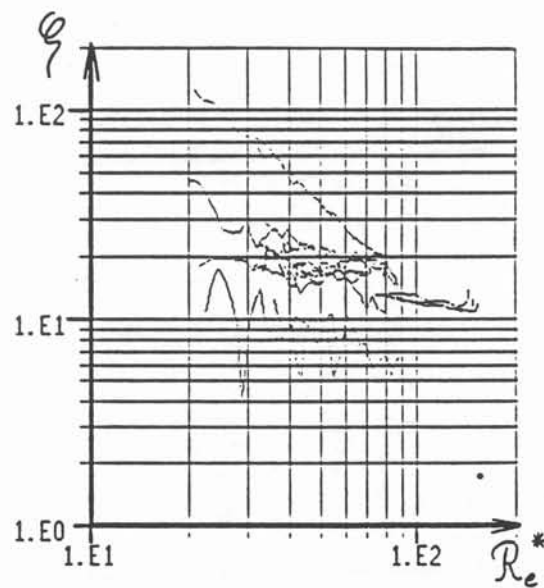
- Figure 7 -

Resultats de mesures en eau



- Figure 6 -

Resultats de mesures
en aluminium liquide



- Figure 8 -

Resultats eau et aluminium superposes

CHAPITRE V

Analyse des résultats numériques,
confrontation à la coulée
expérimentale

CHAPITRE V

Analyse des résultats numériques, confrontation à la coulée expérimentale

V.1 PRELIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous présentons la modélisation numérique de plusieurs types d'injecteurs. La liste des hypothèses utilisées dans la plupart des cas est dressée au paragraphe V.2. A partir de ces hypothèses générales, une résolution numérique est réalisée. D'autres résolutions sont faites en levant ou en améliorant certaines hypothèses peu ou mal justifiées. La confrontation des différents résultats permet d'estimer l'influence de chacune d'entre elles. Pour les différents types d'injecteurs, les résultats sont présentés et commentés aux paragraphes V.3 à V.5.

Au paragraphe V.4, pour une coulée de type traditionnel avec un combo-bag, les résultats de la modélisation sont comparés aux mesures réalisées sur la coulée en grandeur industrielle.

V.2 CONFIGURATION GENERALE DE LA MODELISATION

V.2.1 - Géométrie

a - Panier

Le panier est souple et sa forme a priori inconnue. En toute rigueur, il conviendrait donc de coupler au problème d'hydrodynamique, les équations du comportement mécanique du tissu. Ceci nécessiterait, en outre, la possibilité d'adapter le maillage curviligne orthogonal à la géométrie du panier. Ce problème assez délicat n'est pas abordé.

Le panier est donc supposé rigide et de forme connue. Pratiquement, sa forme est asservie à celle du maillage : pour les cas présentés, il est parallélépipédique.

b - Surface libre

La forme de la surface libre définie par l'équilibre des pressions est a priori inconnue. Sa déformation peut être estimée par :

$$\delta z \sim \frac{W^2}{2g}$$

où W est la composante verticale de la vitesse,
 g l'accélération de la pesanteur.

En pratique, l'observation montre qu'elle est plane. Cette remarque associée à la difficulté d'adaptation des maillages, nous conduit à imposer une surface libre plane. Les résultats présentés dans la suite de ce chapitre permettent de contrôler la validité de cette hypothèse. En effet, les vitesses obtenues au voisinage de la surface libre sont de l'ordre de 10^{-2} m/s à 10^{-1} m/s. Ces vitesses donnent une déformation maximale de l'ordre de quelques millimètres, ce qui est nettement inférieur aux dimensions du marais (CQFD).

c - Lingotière

La faible courbure de la lingotière, ainsi que les arrondis des angles sont négligés. La section de la plaque modélisée est donc rectangulaire ce qui est parfaitement réaliste.

d - Front de solidification

La forme du front de solidification est issue de la compétition de phénomènes thermiques et métallurgiques, tant dans le solide que dans le liquide (cf § I.3). Nous avons choisi de nous limiter au domaine liquide ; la forme du front de solidification doit donc être connue, elle est une donnée du problème.

Les métallurgistes ont établi expérimentalement des abaques qui permettent de prédire la position du front de solidification en fonction des différents paramètres de coulée. Ces résultats sont confidentiels, aussi la figure V.1 ne présente que la forme géométrique du profil du front de solidification.

L'obtention de maillages curvilignes orthogonaux épousant parfaitement cette forme, est difficile, voire même impossible. De plus, une modélisation fidèle de cette géométrie n'apparaît pas indispensable à la compréhension des effets de l'injection sur les mouvements du métal liquide.

Nous avons donc choisi d'approcher la géométrie du front de solidification par des formes permettant l'utilisation de maillages curvilignes orthogonaux analytiques simples.

e - Symétries

Pour les injections avec panier ou flotteur, la géométrie "théorique" du marais liquide présente deux plans de symétrie. Pour la coulée en charge, un seul plan de symétrie existe. En réalité, l'injecteur peut présenter une faible dissymétrie qui peut se traduire par une importante dissymétrie de l'écoulement.

Pour un grand nombre de calculs, nous avons ignoré l'existence possible de ces dissymétries. Le domaine de calcul peut ainsi être réduit à sa moitié pour les coulées en charge et à son quart pour les injections par panier ou flotteur.

V.2.2 - Paramètres de coulée

Pour des produits de section : 1,1 m x 0,530 m, les différents calculs sont réalisés pour les conditions de production suivantes :

- vitesse de tirage : 10^{-3} m/s
- surchauffe d'injection : 50 K
- section d'injection : . . 260 mm² en coulée traditionnelle,
 . . 53 x 54 mm² en coulée en charge.
- paniers de type "simple-bag" :
 Largeur 375 mm
 Longueur 500 mm

Proportion obturée : 30 %
 Profondeur immergée : 60 mm
 Taux de vide du tissu perméable : 35 %

- panier de type "combo-bag"

Largeur : 100 mm
 Longueur : 320 mm
 Profondeur : 65 mm
 Section des orifices : $50 \times 50 \text{ mm}^2$
 Taux de vide du tissu perméable : 45 %

V.2.3 - Modèles utilisés

Les calculs sont réalisés avec le modèle k- ϵ (cf § II). La viscosité turbulente est calculée itérativement à chaque noeud à partir des valeurs des variables k et ϵ .

Les propriétés de l'aluminium liquide sont supposées constantes.

Pour prendre en compte la convection naturelle, on se place dans l'hypothèse de Bousinesq.

V.2.4 - Conditions aux limites

Elles sont définies comme suit :

Front de solidification :

- loi de couches limites hydrauliques pour une paroi lisse défilante et poreuse (cf § I.3.2),
- loi de couches limites thermiques correspondante (cf § I.3.3).

Surface libre :

- composante normale de la vitesse nulle (Dirichlet),
- frottements nuls (Neuman homogène),
- suivant les cas : Flux thermique nul ou coefficient d'échange avec l'extérieur uniformément réparti sur la surface libre ; 17 W/m/K (cf §I.3.3).

Plans de symétrie :

- composante normale de la vitesse nulle (Dirichlet),
- frottements nuls (Neuman homogène),
- flux thermiques nuls (Neuman homogène).

V.3 SIMPLE-BAG

V.3.1 - Simplification maximale

Pour ce cas, la configuration de modélisation est choisie la plus simple :

- pas de convection naturelle,
- pas d'échange thermique à la surface libre,
- domaine parallélépipédique,
- les symétries sont prises en compte.

Les résultats de cette modélisation sont présentés dans les figures V.2 à V.4.

A l'intérieur du panier, le jet d'injection (figure V.2) s'écrase sur le fond étanche et aspire le métal de la partie supérieure. Il en résulte un brassage qui homogénéise la température et confine les gradients thermiques à proximité du jet.

Les vitesses de traversée des portions poreuses du panier sont représentées par la figure V.3. Sur les côtés du panier ces vitesses sont sortantes avec un maximum localisé à l'angle. Sur le fond, elles sont partiellement entrantes et sortantes. Ceci résulte de l'aspiration créée par l'importante inertie du métal liquide léchant le fond du panier. Ce phénomène imprévu est important, car il couple les mouvements interne et externe au panier.

La figure V.4 montre les champs thermiques et cinématiques du métal liquide, sur les plans de symétrie, et à la surface libre à l'extérieur du panier. Le jet d'angle du panier crée un vortex vertical de grande dimension à l'extrémité du marais, et un autre plus petit d'axe aussi vertical coincé à côté du panier. Sous le panier, le phénomène d'aspiration du métal décrit précédemment, provoque une déformation du champ de température et une inhomogénéité supplémentaire du gradient thermique. La représentation tridimensionnelle d'une surface isotherme (figure V.3) montre l'importance de cet effet dans le volume.

V.3.2 - Convection naturelle

La configuration de la modélisation précédente est conservée en y ajoutant l'effet des forces dues à la dilatation du matériau.

Les champs thermique et de vitesse à l'extérieur du panier sont représentés par la figure V.5, de la même façon que pour le cas précédent.

A l'intérieur du panier, comme il était prévisible, les forces de convection naturelle ne modifient pas l'écoulement.

A l'extérieur du panier, la convection naturelle qui est dominante, a deux effets :

i - Elle crée un jet pariétal descendant à proximité des parois froides. Ce jet pompe le métal liquide en surface et le redistribue ensuite dans la partie basse du marais.

ii - Au coeur du marais, la stratification thermique ascendante amortit la composante verticale de la vitesse. Ceci a pour effet de bidimensionnaliser l'écoulement dans des couches horizontales se qui se traduit par un amoindrissement du phénomène de pompage du panier.

Les profils (figure V.6) de la composante verticale de la vitesse illustrent ces deux effets.

V.3.3 - Approche curviligne

Pour approcher de façon plus réaliste la courbure du front de solidification, tout en conservant une certaine simplicité géométrique, nous avons assimilé le front de solidification à une surface cylindrique simple (figure V.7). Le volume correspondant est discrétisé en deux parties :

i - la partie supérieure parallélépipédique qui contient le panier a un maillage cartésien.

ii - la partie inférieure (cylindre de révolution) est discrétisée de deux manières différentes :

- . un maillage cylindropolaire (figure V.7),
- . un maillage appelé "oeil de chat" obtenu par l'intersection de deux familles analytiques de cercles orthogonaux (figure V.8).

Pour ces deux maillages, nous avons réalisé les calculs avec et sans prise en compte de la convection naturelle. Les résultats (figures V.10 à V.13), sont intéressants pour les raisons que nous allons développer ci-après.

i - Comparaison des deux maillage curvilignes :

Elle montre par sa bonne correspondance, l'auto-cohérence (interne) du logiciel pour des calculs réalisés avec des maillages curvilignes topologiquement différents. Ceci est illustré par les profils de température en figure V.9.

Remarque :

Dans la pratique, nous avons observé que la convergence du calcul réalisé avec le maillage de type cylindropolaire, était beaucoup plus délicate à obtenir que pour le maillage de type "oeil de chat". Nous n'avons pas d'explication certaine, associée à ce phénomène. Nous avons toutefois des soupçons qui mettent en cause la topologie du maillage :

Au voisinage de l'axe de révolution de la partie cylindropolaire du maillage, deux points physiquement très proches, peuvent être dans le domaine de calcul, séparés par plusieurs couches de volume de contrôle du maillage. Cet axe étant dans le plan de symétrie, c'est une condition de Neuman homogène qui y est appliquée. Cette condition n'impose pas l'identité des valeurs de chacune des variables aux deux points ; c'est itérativement qu'elle doit apparaître, ce qui pénalise la convergence.

Pour le maillage de type "oeil de chat", la ligne de convergence est située à l'intersection du plan de symétrie et du front de solidification. Les valeurs des variables y étant connues, la condition de Dirichlet est imposée. Le problème précédemment cité n'apparaît pas.

Pour pallier cet inconvénient, un traitement spécial des lignes ou des points de convergence des maillages devrait être fait.

ii - Comparaison des résultats en maillage curviligne et rectangulaire :

Elle conforte la validité qualitative des résultats obtenus dans des géométries rectangulaires (figures V.4, V.10 et V.9). En effet, on remarque, la similitude des structures et la correspondance quantitative avec cependant quelques différences dans le fond du marais.

Le maillage curviligne permet d'affiner quantitativement les résultats uniquement dans le fond du marais.

V.3.4 - Panier excentré

La position du panier est en pratique peu précise et assez mal maîtrisée. Pour simuler un éventuel décentrage, la totalité du volume de métal liquide est pris en compte avec le décentrage arbitraire suivant : 13 mm selon la grande dimension du marais, et 13 mm selon la dimension perpendiculaire.

Les calculs sont réalisés pour une géométrie parallélépipédique avec et sans la prise en compte de la convection naturelle.

Lorsque l'on ignore les forces convectives, le calcul ne converge pas complètement et semble osciller entre deux états :

i - Un état "quasi-symétrique" (figure V.14) pour lequel la structure de l'écoulement est proche de celle observée pour le cas où l'on force la symétrie (figure V.4).

ii - Un état tourbillonnaire (figure V.15) : un vortex occupe l'ensemble du marais et homogénéise le champ thermique.

Ce phénomène oscillatoire peut avoir deux origines : il peut être lié à la non linéarité des équations résolues, ou à un phénomène de chaos numérique.

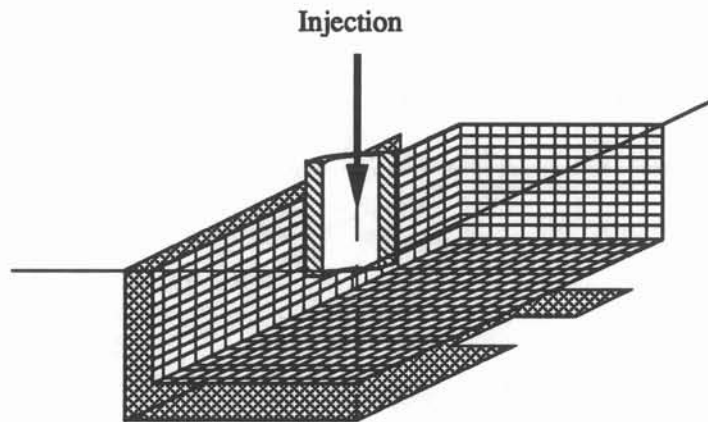
En tenant compte de la convection naturelle, le calcul converge correctement. La structure de l'écoulement et la répartition thermique (figure V.16) sont relativement proches de celles obtenues en forçant les symétries (figure V.6). La convection naturelle prédominante à l'extérieur du panier a pour effet de rendre l'écoulement symétrique.

A lui seul, ce dernier résultat justifie l'hypothèse de symétrie puisqu'il montre que le modèle le plus fidèle à la réalité respecte les symétries.

V.4 COMBO-BAG

Pour une coulée réalisée avec un panier de type combo-bag, des mesures thermiques ont été faites et sont comparées dans ce paragraphe aux résultats du calcul.

La simulation numérique est réalisée dans un domaine parallélépipédique en tenant compte des symétries. La géométrie de modélisation du combo-bag (figure V.17) est définie dans le maillage cartésien.



- Figure V.17 -
Géométrie de modélisation du combo-ba

Les résultats du calcul sont présentés dans la figure V.18. Le métal chaud qui s'échappe du panier essentiellement par ses ouïes est aspiré vers les parois

froides du front de solidification. On remarque que très peu de métal est évacué par l'orifice.

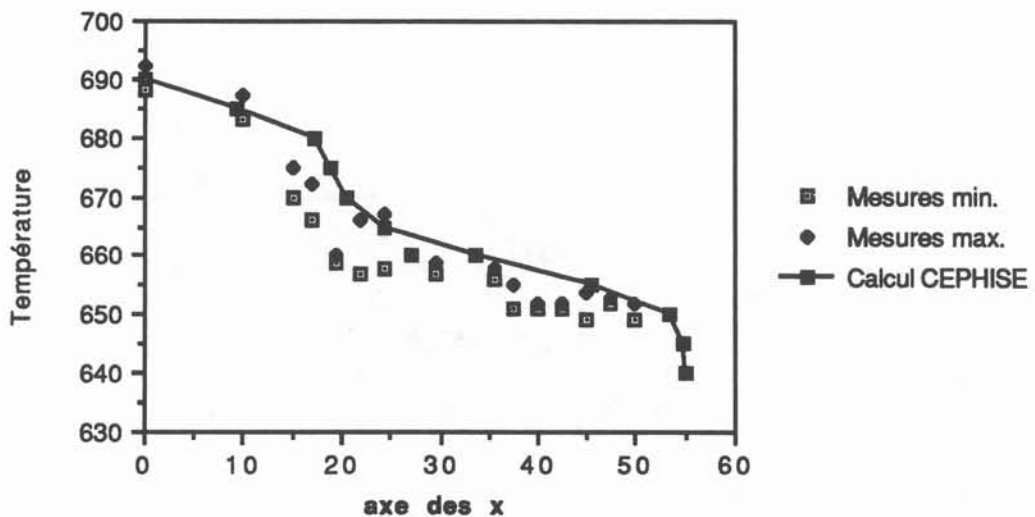
Le résultat des mesures est superposé au profil de température obtenu numériquement dans le graphe de la figure V.19. Sur ces profils, on distingue quatre zones :

i- Pour $x < 16$ cm : il s'agit de la partie intérieure au combo-bag pour laquelle, la décroissance thermique est linéaire, et les deux profils en parfait accord.

ii - Pour $16 \text{ cm} < x < 22$ cm : Dans cette zone voisine du panier, les gradients thermiques sont plus importants. Aussi, la corrélation entre mesures et calculs est moindre.

iii - Pour $22 \text{ cm} < x < 50$ cm : Dans cette zone loin de tout obstacle, les gradients thermiques sont de nouveau plus faibles. Bienque les températures calculées soient sensiblement supérieures à celle mesurées, les pentes respectives sont en bon accord.

iv - Pour $50 \text{ cm} < x < 55$ cm : A l'intérieure de cette région proche de la paroi, les gradients thermiques sont élevés.



- Figure V.19 -

Profils expérimentaux et numérique de température le long d'un chemin situé 30 mm en dessous de la surface libre et dans le grand plan de symétrie.

V.5 COULEE EN CHARGE

Pour la coulée en charge, les résultats de modélisation réalisés dans le cadre d'un contrat industriel avec PECHINEY, sont confidentiels et n'ont donc pas leur place dans ce rapport. Ils sont discuté dans l'annexe confidentielle.

V.6 INFLUENCE DES DIMENSIONS DE L'INJECTEUR

Nous avons réalisé la simulation de coulées en faisant varier les dimensions des injecteurs dans le but d'en améliorer l'utilisation.

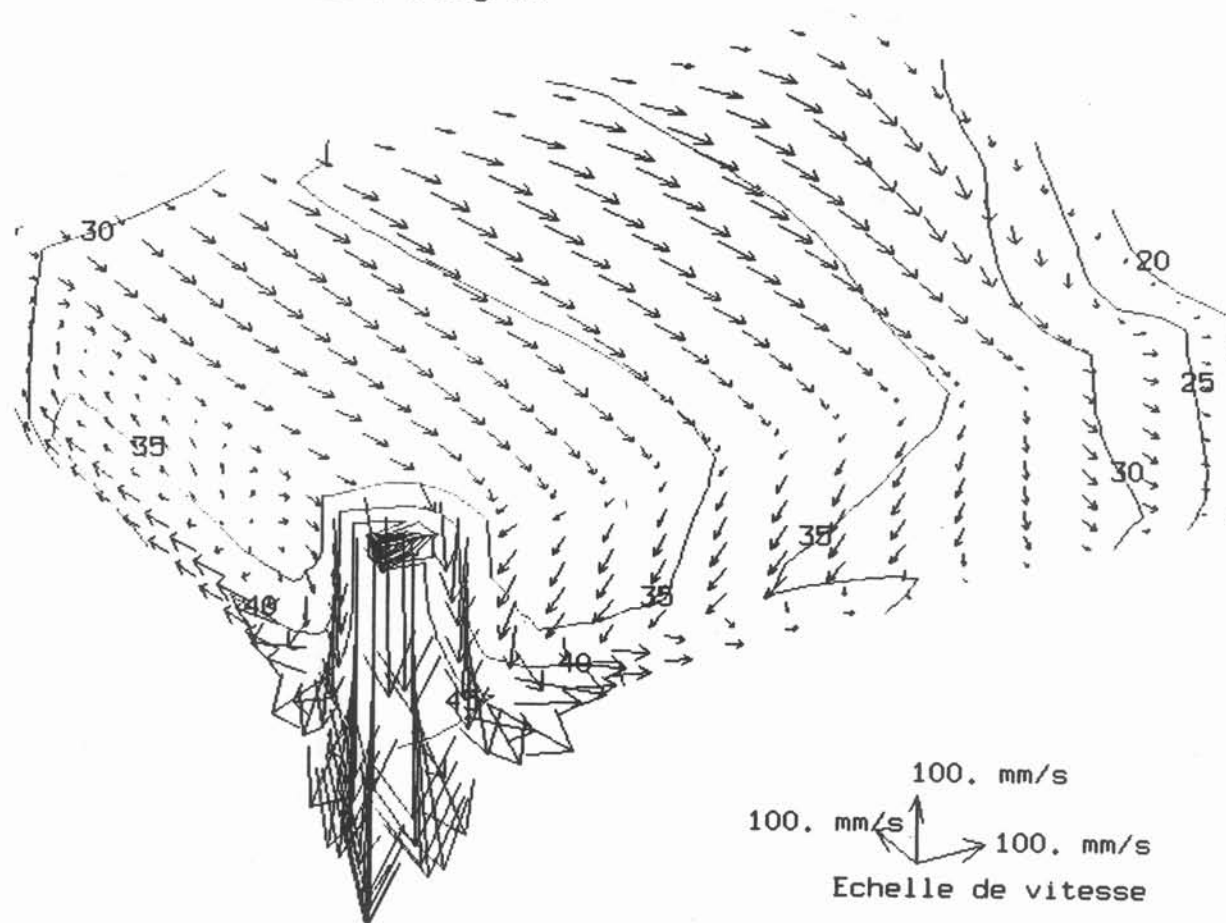
Comme pour la coulée en charge, ces résultats sont confidentiels et figurent dans l'annexe correspondante. Ils permettent de tirer des règles simples d'utilisation de certains injecteurs.

V.7 BILAN

En résumé, les résultats obtenus sont les suivants :

- du point de vue thermique, la bonne concordance des mesures et des calculs est encourageante.
- La géométrie rectangulaire donne des résultats qualitativement valides.
- Les symétries peuvent être prises en compte.
- Pour les coulées avec panier, le couplage des mouvements interne et externe subsiste par le biais de la pression.
- La convection naturelle modifie notablement les champs thermiques et cinématiques.
- Les paramètres géométriques du système d'injection sont déterminants pour la maîtrise du champ thermique.

Pas des isothermes : 5 degres



- Figure V.2 -

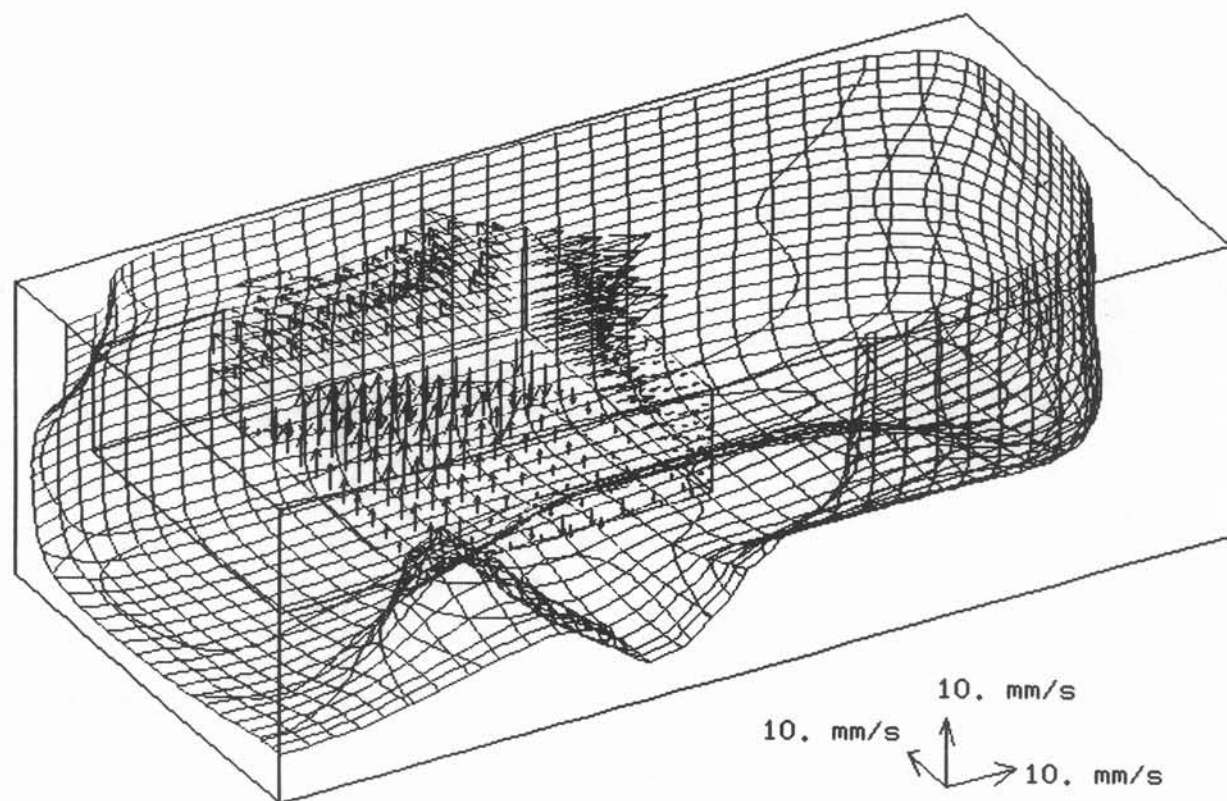
Vitesse et temperature a l'interieur du "simple-bag"

Type de panier : "simple-bag"

---> Vitesse au passage du panier filtre

--- Surface isotherme a $T_s + 7$ degres

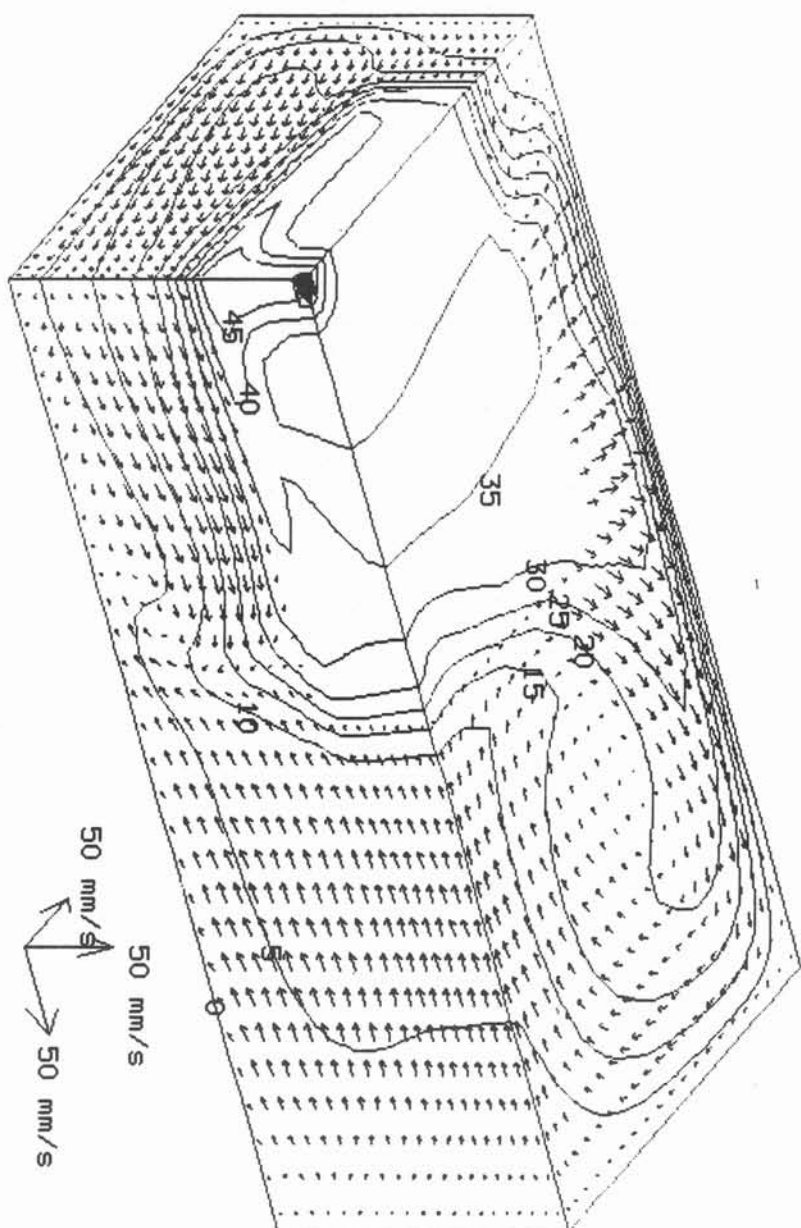
--- Ligne de separation metal entrant / metal sortant



- Figure V.3 -

Effet d'aspiration du panier, sans convection naturelle.

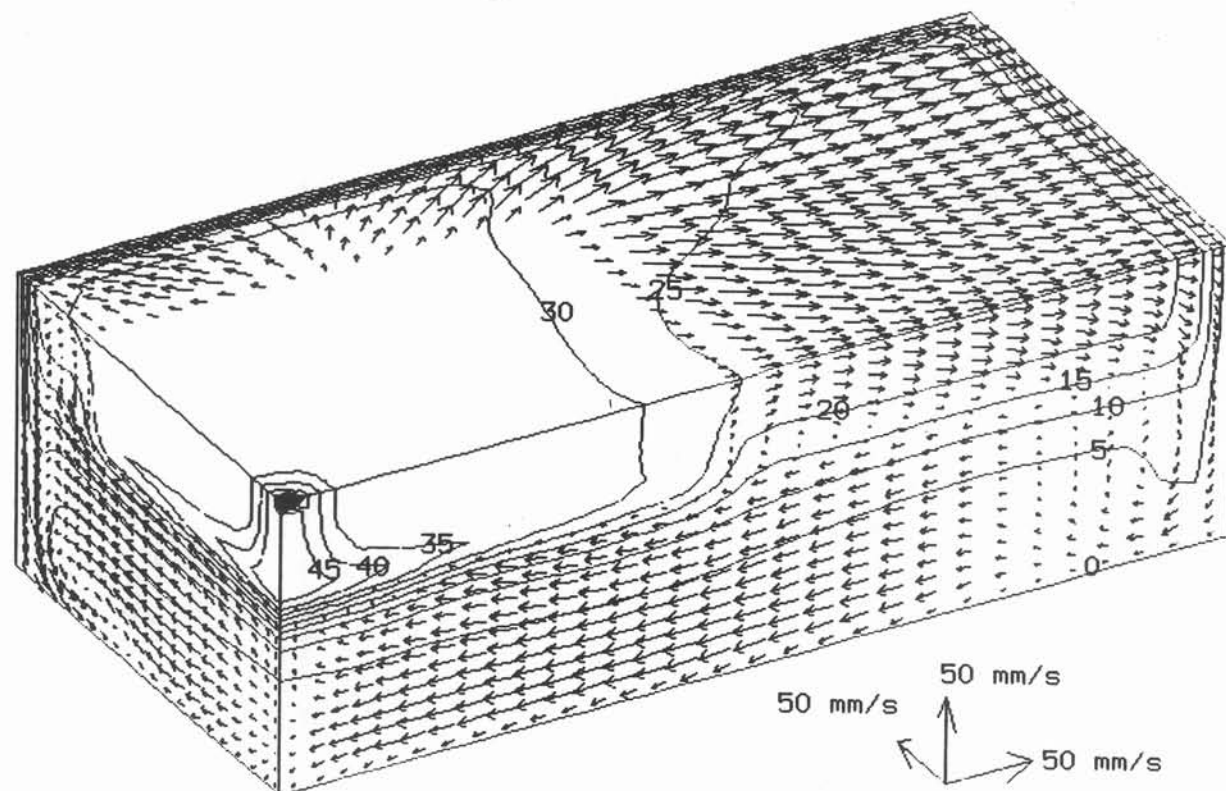
Surchauffe d'injection : 50 degrés
Pas des isothermes : 5 degrés



- Figure V.4 -

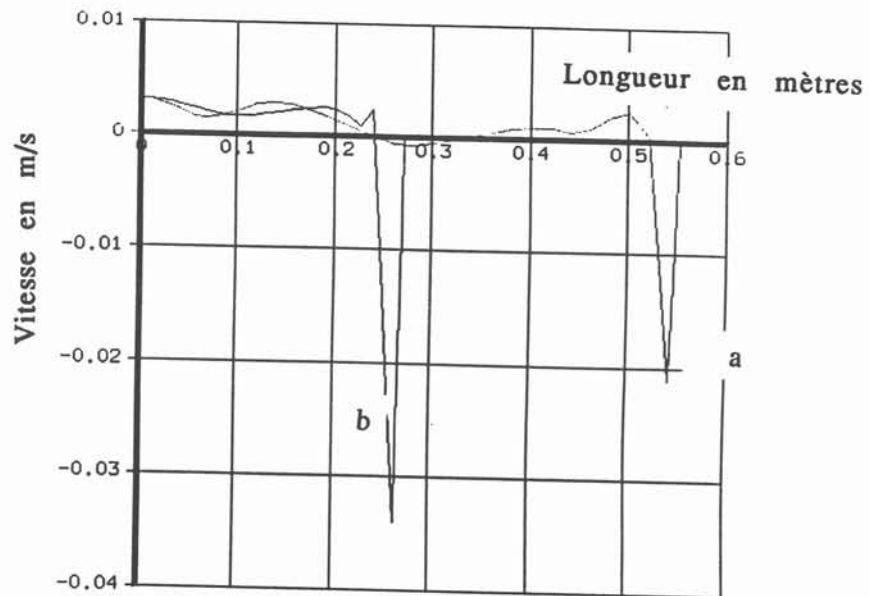
Coulée semi-continue de type traditionnel :
vitesse et température de l'aluminium liquide,
sans convection naturelle,
avec un panier de type "simple-bag".

Surchauffe d'injection : 50 degrés
 Pas des isothermes : 5 degrés

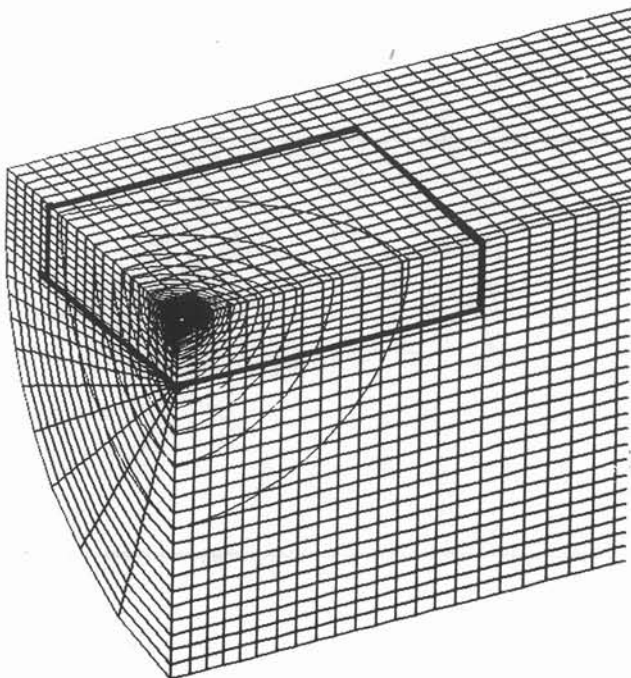


- Figure V.5 -

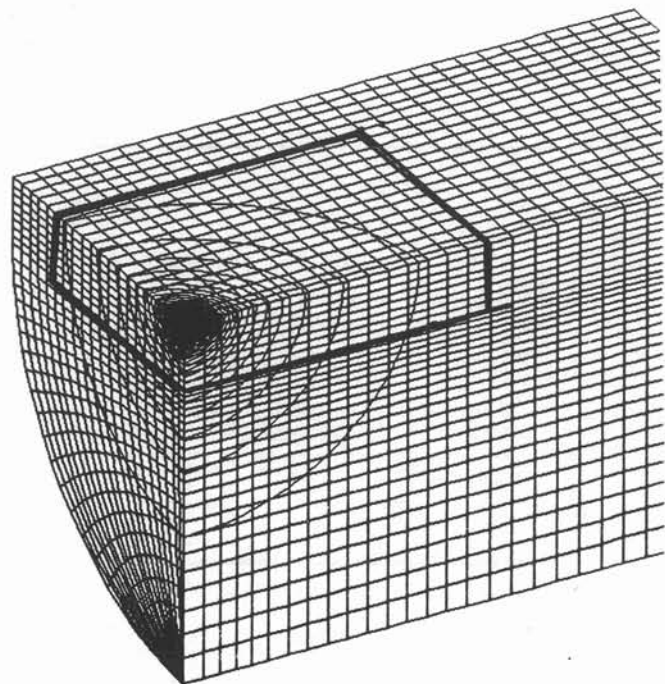
Coulee semi-continue de type traditionnelle,
 vitesse et température de l'aluminium liquide,
 avec convection naturelle,
 avec un panier de type "simple-bag".



- Figure V.6 -
 Profils de la composante verticale de la vitesse
 a - suivant le grand axe de la plaque
 b - suivant le petit axe de la plaque

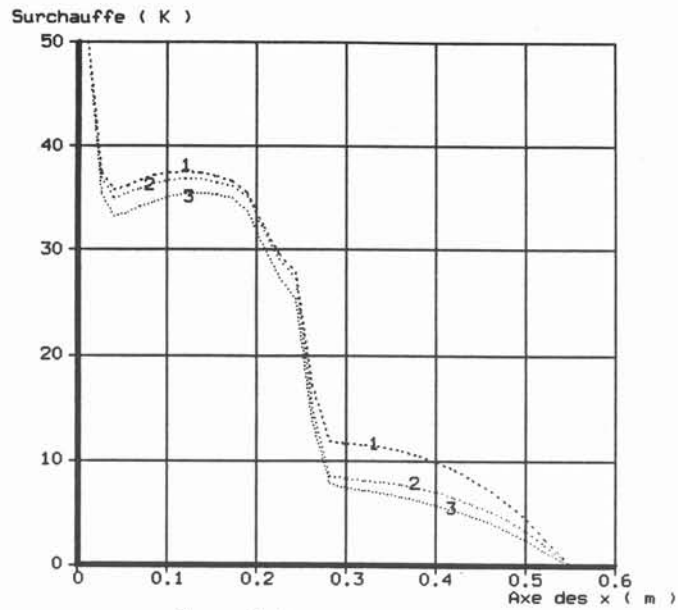


- Figure V.7 -
 Maillage de type
 parallélipédique / cylindropolaire.



- Figure V.8 -
 Maillage de type
 parallélipédique / "oeil de chat"

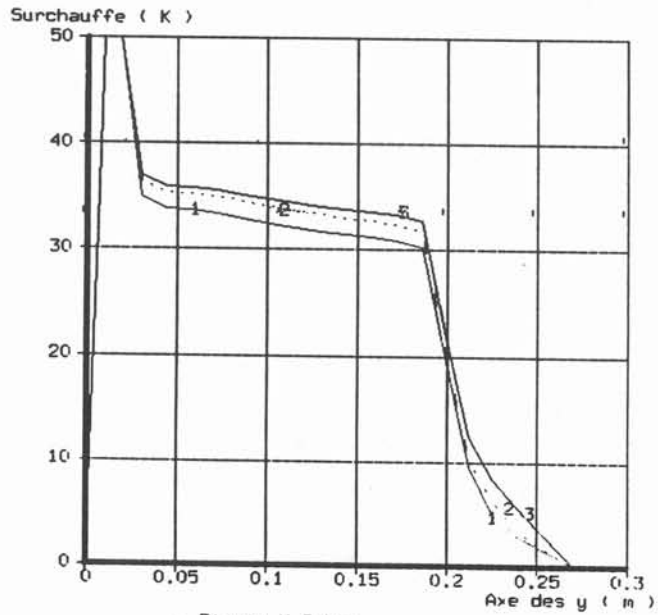
profil 1 : maillage parallelepipedique
 profil 2 : paralle. / cylindropolaire
 profil 3 : paralle. / "oeil de chat"



- Figure V.9.a -

Profils de temperature, sans convection naturelle,
 a la surface libre, suivant le grand axe du marais.

profil 1 : maillage parallelepipedique
 profil 2 : paralle. / cylindropolaire
 profil 3 : paralle. / "oeil de chat"



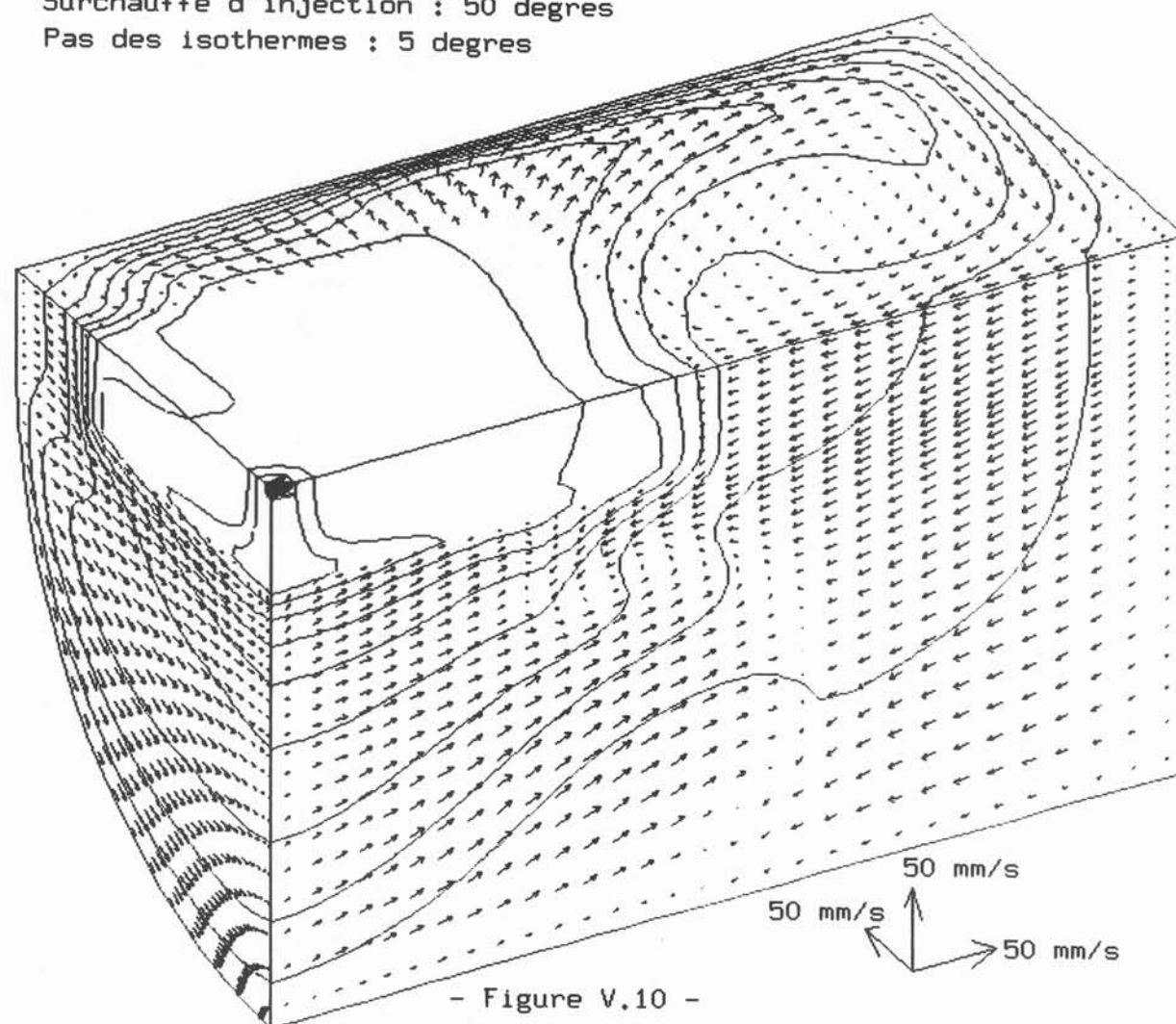
- Figure V.9.b -

Profils de temperature, sans convection naturelle,
 a la surface libre, suivant le petit axe du marais.

Type de panier : "simple-bag"

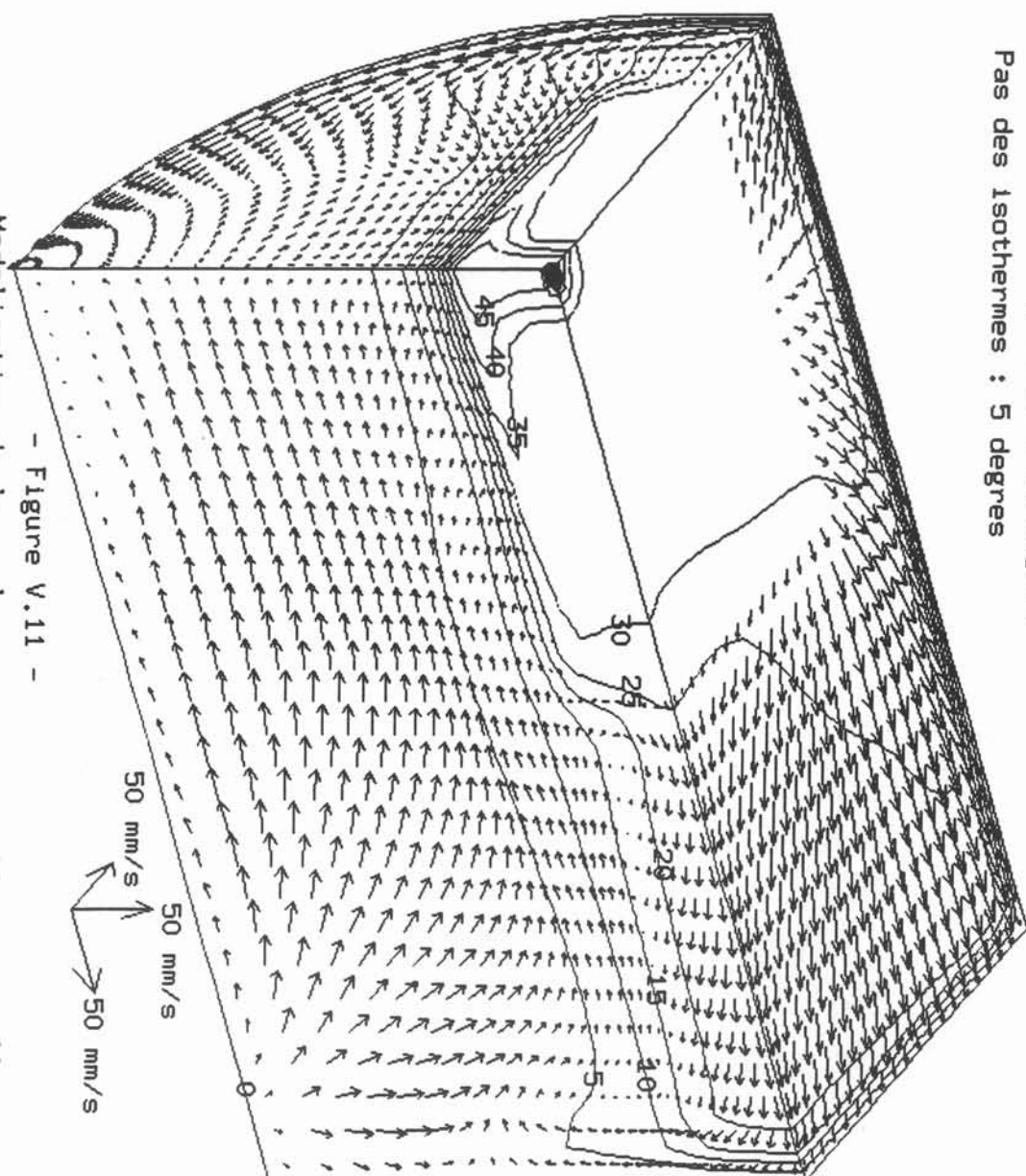
Surchauffe d'injection : 50 degres

Pas des isothermes : 5 degres



Modelisation de la coulee, sans convection naturelle,
avec un maillage de type parallelepiped / "oeil de chat".

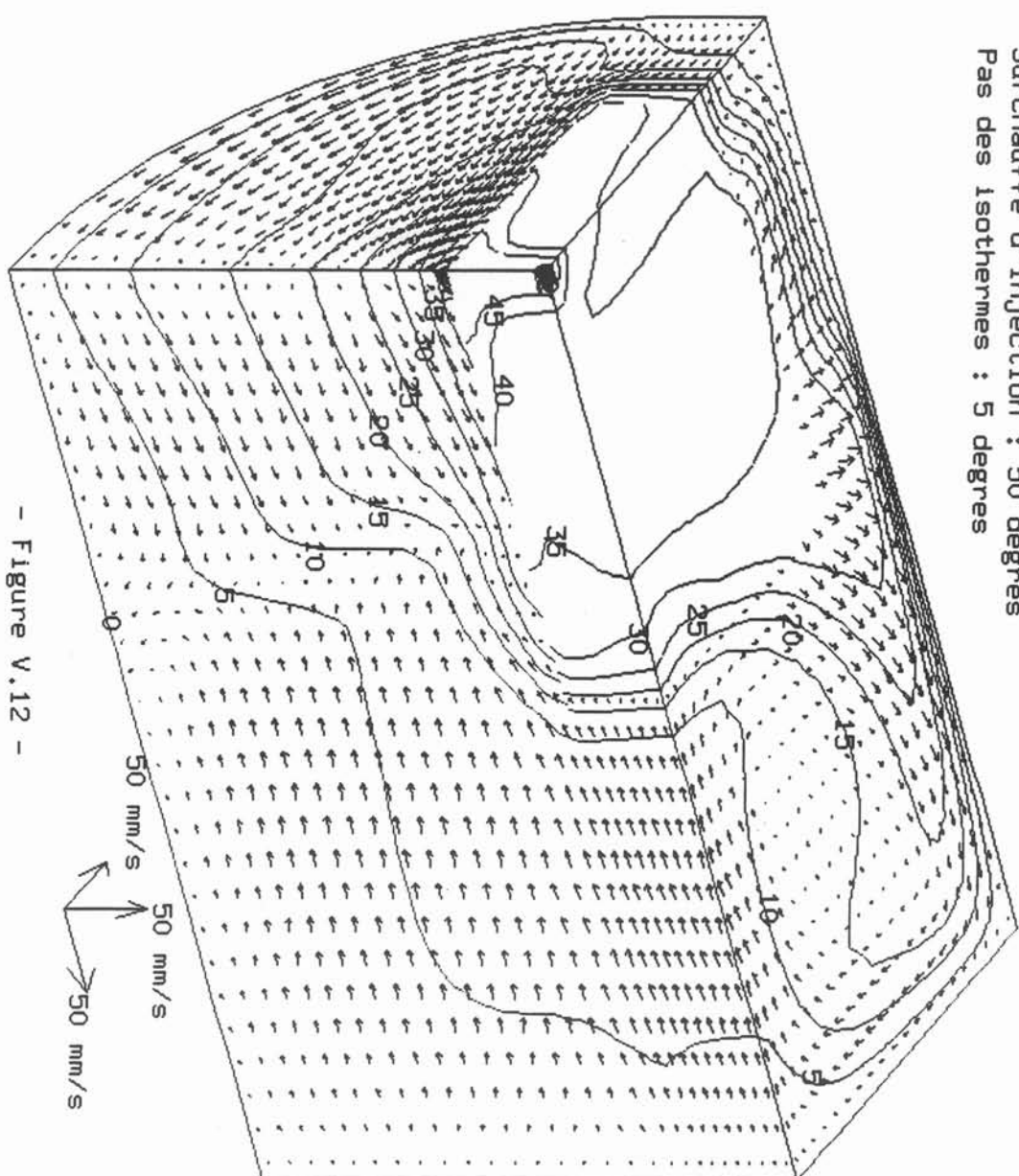
Type de panier : "simple-bag"
 Surchauffe d'injection : 50 degres
 Pas des isothermes : 5 degres



- Figure V.11 -

Modélisation de la coulee, avec convection naturelle,
 avec un maillage parallelepipedique / "oeil de chat".

Type panier : "simple-bag"
 Surchauffe d'injection : 50 degrees
 Pas des isothermes : 5 degrees



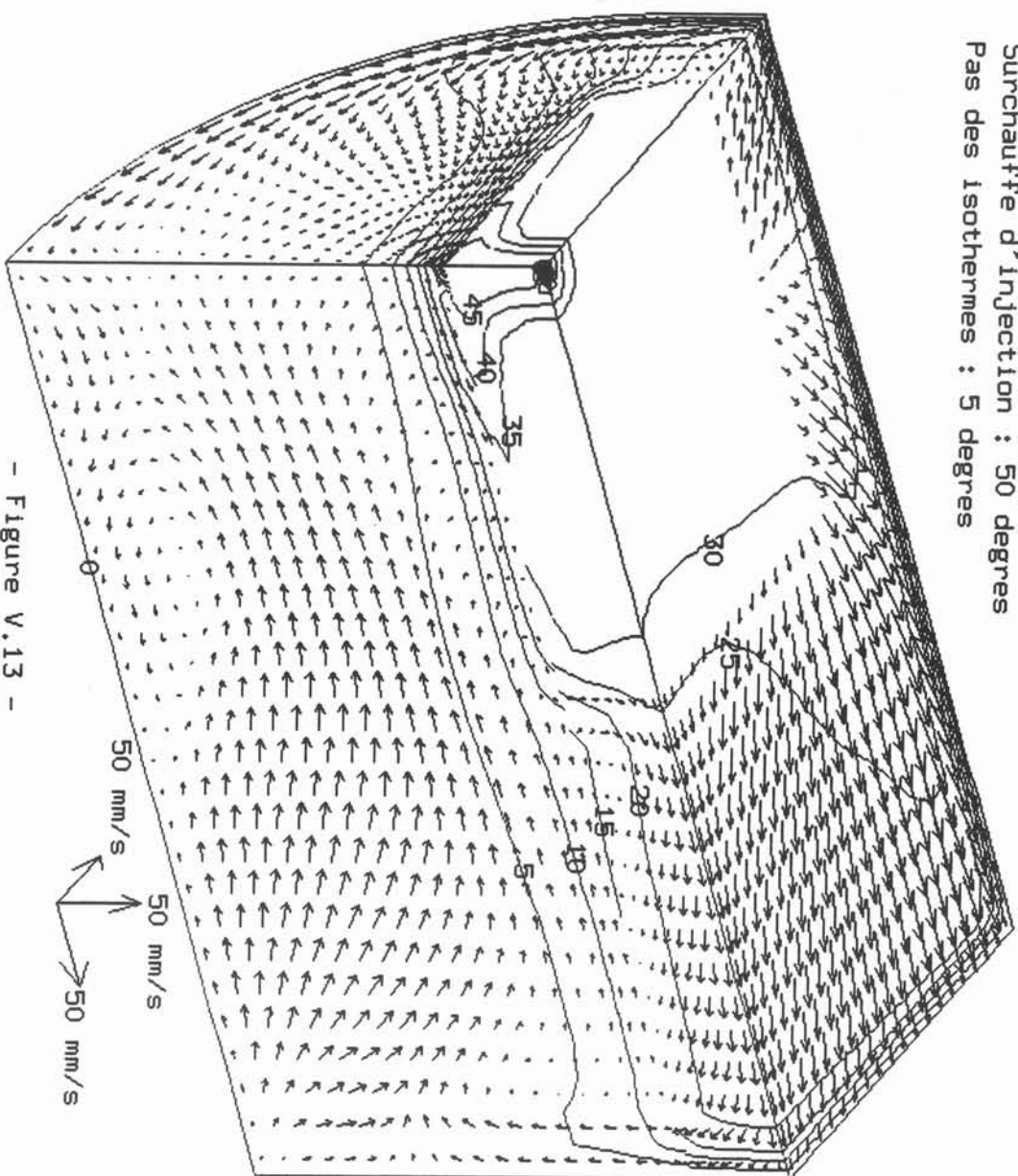
- Figure V.12 -

Modelisation de la coulee, sans convection naturelle,
 avec un maillage de type parallelepiped / cylindropolaire.

Type panier : "simple-bag"

Surchauffe d'injection : 50 degrees

Pas des isothermes : 5 degrees



- Figure V.13 -

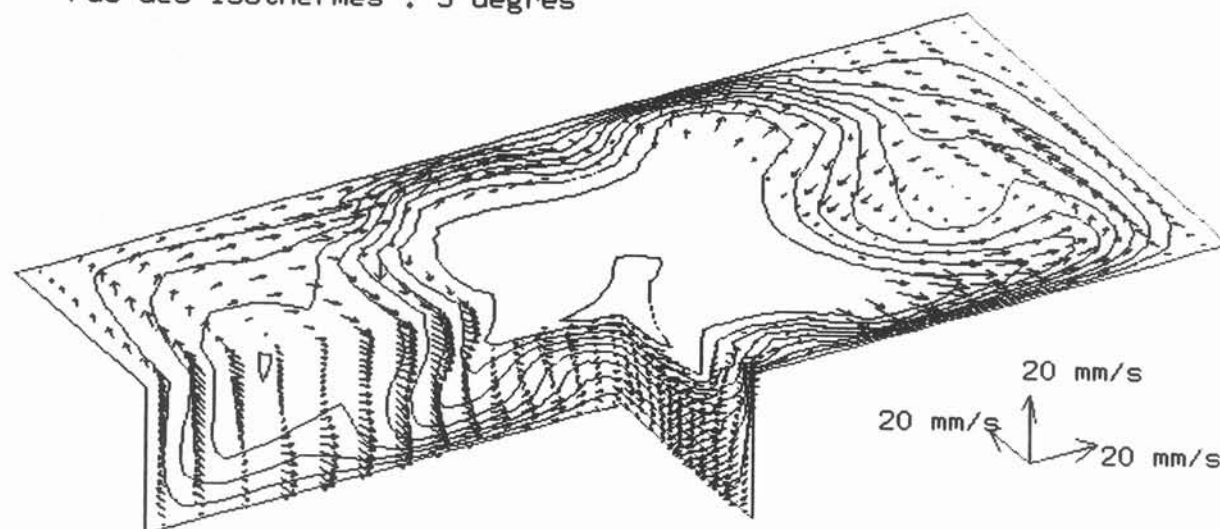
Modelisation de la coulee, avec convection naturelle,
avec un maillage de type parallelepipedique / cylindropolaire

Type panier : "simple-bag"

Decentrage panier : $\sim 5\%$ dans chaque direction

Surchauffe d'injection : 50 degrees

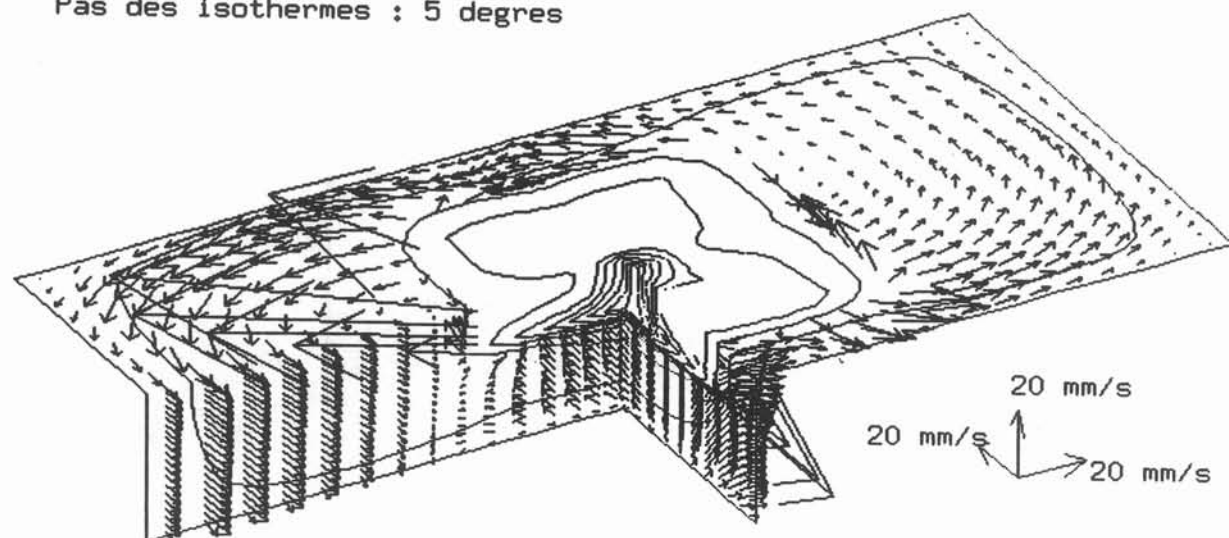
Pas des isothermes : 5 degrees



- Figure V.14 -

Modelisation de la coulee,
avec le panier decentre,
sans convection naturelle.

Type panier : "simple-bag"
Decentrage panier : $\sim 5\%$ dans chaque direction
Surchauffe d'injection : 50 degrees
Pas des isothermes : 5 degrees



- Figure V.15 -

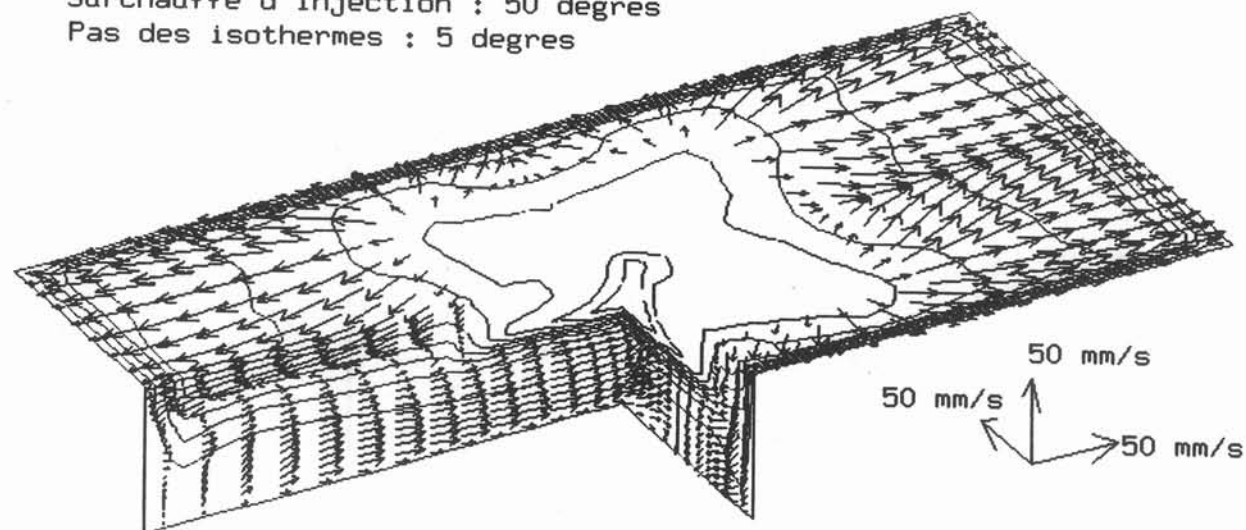
Modelisation de la coulee,
avec le panier decentre,
sans convection naturelle.

Type panier : "simple-bag"

Decentrage panier : ~5 % dans chaque direction

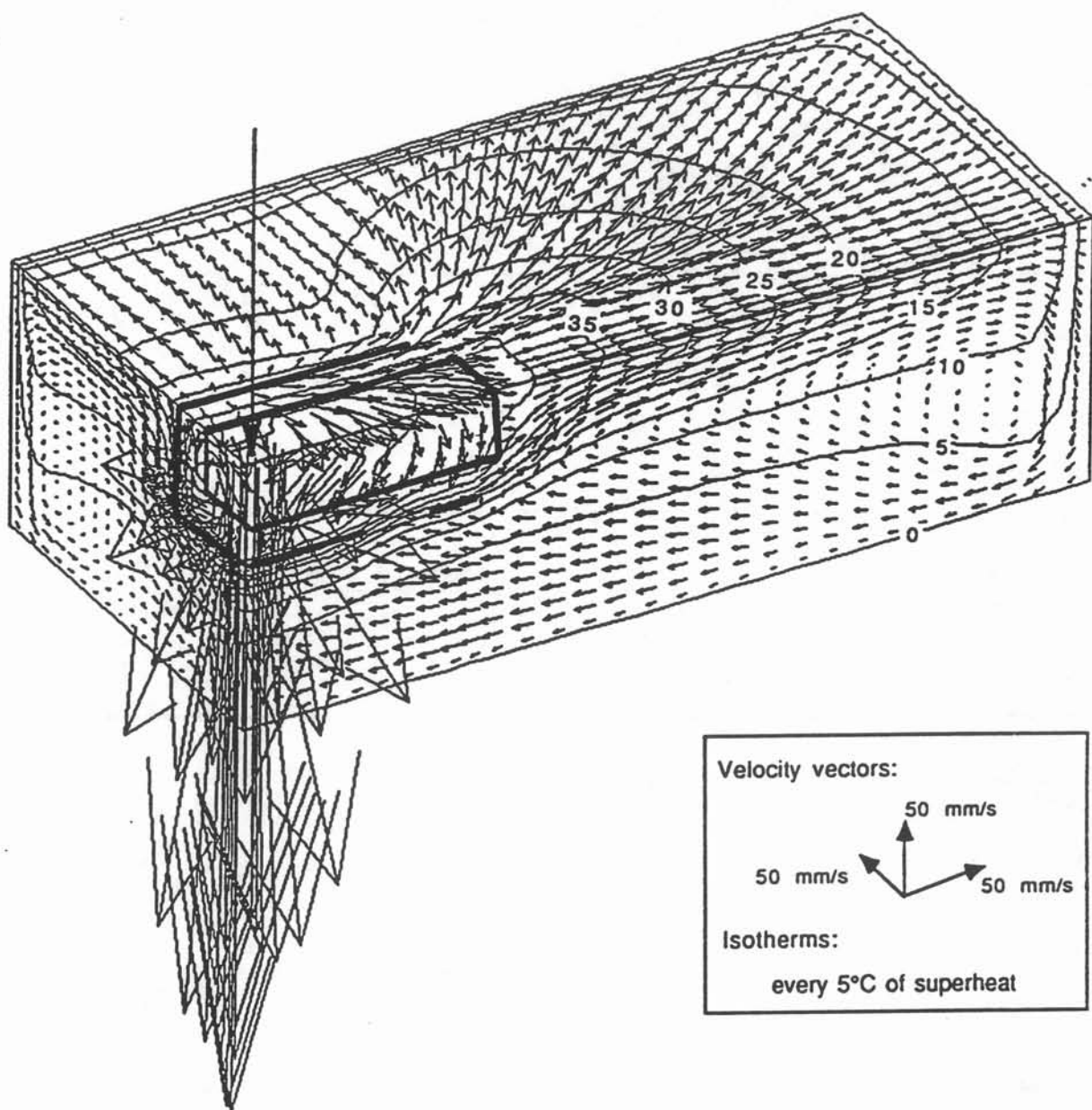
Surchauffe d'injection : 50 degres

Pas des isothermes : 5 degres



- Figure V.16 -

Modelisation de la coulee,
avec le panier decentre,
avec convection naturelle.



- Figure V.18 -
 Vitesse et température de l'aluminium liquide,
 avec un panier de type combo-bag,
 en présence de convection naturelle.

CONCLUSION

En conclusion nous pouvons dire que le programme CEPHISE donne des résultats encourageants pour la prédiction de la thermohydraulique des coulées semi-continues des plaques d'aluminium. Sa souplesse d'utilisation lui permet d'étudier de nombreux types d'injecteur.

Nous avons vu que la conception même de ce programme peut être sensiblement améliorée suivant différents axes. Nous ne rappellerons ici que le point qui nous semble le plus important : à savoir l'utilisation de maillages mixtes orthogonaux aux limites et quelconques ailleurs afin de s'assurer le maximum de possibilités sans trop alourdir la procédure.

Les efforts futurs devront aussi s'orienter vers la modélisation des phénomènes de solidification et de ségrégation des alliages.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- /I.1/ W.KURZ, D.J. FISCHER**
 "Fundamentals of solidification"
 Trans. Tech. Publications, 1984.
- /I.2/ E. TABERLET**
 "Le brassage turbulent dans les fours à induction",
 Thèse de Docteur-Ingénieur, Grenoble, 1984.
- /I.3/ C.L. BURMEISTER**
 "Convective heat transfert"
 Wiley-Interscience Publication, 1982.
- /I.4/ KATGERMAN**
 "A Mathematical Model for Hot Cracking of Aluminium Alloys During D.C. Casting."
 Journal of metal 34, (2), 46-49 Feb.1982.
- /I.5/ JENSEN**
 "Mold temperatures During DC Casting of 8 In. Dia. Extursion Ingots in Alloys 6063."
 TMS/AIME, 420 Commonwealth Dr., Warrendale, Pa 15086, USA 1984.
- /I.6/ SELCUK**
 "Mathematical Modelling of Heat Transfert in Horizontal Continuous Casting Systems."
 The Institute of Metals, London SW1YDB, UK, 1988.
- /I.7/ TOMAS, SAMARASEKERA, BRIMACOMBE**
 "Mathematical model of the thermal Processing of Steel Ingots. I. Heat Flow Model."
 Metall. Trans. B 18B, (1), 119-130 Mar. 1987.
- /I.8/ FLOOD, KATGERMAN, LANGILLE, READ.**
 "A Model of solidification, Fluid Flow and Stress Distribution in DC Casting."
 TMS/AIME, 420 Commonwealth Dr., Warrendale, Pa 15086, USA 1988.

- /I.9/ **FLOOD, KATGERMAN, LANGILLE, READ.**
 "Modeling of Fluid Flow and Stress Phenomena During DC Casting of Aluminium Alloys."
 TMS/AIME, 420 Commonwealth Dr., Warrendale, Pa 15086, USA 1989.
- /I.10/ **CLYNE**
 "Heat-Flow, Solidification, and Energy Aspects of DC an Strip Casting of Aluminium Alloys"
 Met. Technol. 11, (8), 350-357 Aug. 1984.
- /I.11/ **ADAM**
 "Overview of D.C. Casting."
 TMS/AIME, 420 Commonwealth Dr., Warrendale, Pa 15086, USA 1981.
- /I.12/ **M.S. JI, W. SCHMITZ, S. ENGLER**
 "Investigations on the filing procedure at vertical continuous casting of aluminium alloys by a water-simulation-model."
 Metallwissenschaft 44, (2), feb. 1990.
- /I.13/ **K. TAKATANI, K. NAKAI, N. KASAI,...**
 "Analysis of heat transfer and fluid flow in the continuous casting mold with electricomagnétique brake."
 The Sixth IISC, Vol. 4, Steelmaking II, 430-437, 1990.
- /II.1/ **W. RODI**
 "Turbulence Models for Environmental Problems", Prediction Methods for Turbulent Flows, von Karman Institute Lecture Series, 1979 - 2.
- /II.2/ **LAUNDER**
 "Second-moment closure : methodology and practice", Modèles de turbulence et leurs applications, Col. Eyrolles, 1984.
- /II.3/ **B.E. LAUNDER et D.B. SPALDING**
 "The numerical computation of turbulent Flows", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 3, 1974, pp. 269-289.
 (North-Holland Publishing Company).

- /III.1/ G. RYSKIN, L.G. LEAL**
 "Orthogonal mapping"
 J. of Computational Physics, 50, 1983, pp. 71-100.
- /III.2/ M. VISBAL, D. KNIGHT**
 "Generation of orthogonal and nearly orthogonal coordinates with grid control near boundaries"
 AIAA Journal, 20, 1982, pp. 305-306.
- /III.3/ WARSI**
 "Generation of three dimensional grids through elliptic differential equations"
 Von Karman Insitute, Lecture serie 04, 1984.
- /III.4/ J.F. THOMPSON, Z.U.A. WARSI, C.W. MASTIN**
 "Boundary-fitted coordinate systems for numerical solution of partial differential equations. A review."
 Journal of Computational Physics, 47, 1982, pp. 1-108
- /III.5/ C.F. SHIEH**
 "Three dimensional grid generation using elliptic equations with direct grid distribution control"
 AIAA Journal, vol. 22, N° 3, 1984, pp. 361-364.
- /III.6/ P.D. THOMAS, J.F. MIDDLECOFF**
 "Direct control of the grid point distribution in meshes generated by elliptic equations"
 "AIAA Journal, vol. 18, N° 6, 1980, pp. 652-656.
- /III.7/ J.F. THOMPSON, F.C. THAMES, C.W. MASTIN**
 "Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two dimensional bodies"
 Journal of Computational Physics, vol. 15, N° 3, 1974.

- /III.8/ S.B. POPE**
 "The calculation of turbulent recirculation flows in general orthogonal coordinates"
 Journal of Computational Physics, vol. 26, 1978, pp. 197-217.
- /III.9/ A.D. GOSMAN, W.M. PUN, A.K. RUNCHAL, D.B. SPALDING, M. WOLFSHTEIN**
 "Heat and Mass transfer in recirculating Flows"
 Academic Press, London, 1969.
- /III.10/ PATANKAR**
 "Numerical heat transfer and fluid flow", Hemisphere Publishing Corporation, Mc Graw-Hill Book Company, 1980.
- /III.11/ P. CHEVRIER**
 "Simulation numérique de l'interaction arc-électrique-écoulements gazeux dans les disjoncteurs moyenne et haute tension", Thèse de Docteur Ingénieur, Grenoble 1990.
- /III.12/ G.D. RAITHBY**
 "Skew upstream differencing schemes for problems involving fluid flow"
 Computer Meth. in Applied Mechanics and Engineering, 9, 1976, pp. 153-164.
- /III.13/ G. DAVIS, G.D. MALLINSON**
 "An evacuation of upwind and central difference approximations by a study of recirculating flow"
 Computers and fluids, vol. 13, 1985, pp. 29-43.
- /III.14/ A.O. DEMUREN**
 "False diffusion in three-dimensional flow calculations"
 Computers and fluids, vol. 13, 1985, pp. 411-419.

/III.15/ B.P. LEONARD

"A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation"

Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 19, 1979, pp. 59-98

/III.16/ I. SAWADA

"An algorithm for computational fluid dynamics, NSMAC"

Transaction of Japanese Society of Mechanical Engineering, in print.

/III.17/ J. ZHU

"Calculs des jets turbulents confinés avec recirculations"

Th. de D.I., Spécialité Mécanique, 1986, U.S.M.G. et I.N.P.G, Grenoble

/III.18/ P.H. GASKELL, A.K.C. LAU

"Curvature - Compensated Convective Transport : SMART, a new boundeness preserving transport algorithm"

International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 8, 1988, pp. 617-641.

/III.19/ D.B. SPALDING

"A novel finite difference formation for differential expressions involving both first and second derivatives"

Internationzl J., numer. Meth. Eng., 4, 1972, pp. 551-559

/III.20/ G.D. RAITHBY

"A critical evaluation of upstream differencing applied to problems involving fluid flows"

Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 9, 1976, pp. 73-103

/III.21/ M. ROCINI

"Fusion de verre par induction : étude magnétique et thermique",
Thèse de Docteur-Ingénieur, Grenoble, 1990.

/III.22/ C. C. ZHAO

"Ecoulement et turbulence dans un four à induction à canal",
Thèse de Docteur-Ingénieur, Grenoble, 1991.

/III.23/ G. K. BATCHELOR

"An Introduction to Fluid Dynamics"
Cambridge University Press, 1967.

/IV.1/ IDEL'CIK

"Memento des pertes de charge"
Eyrolles, 1960.

/IV.2/ B. BRUNCHNER

"Etude des caractéristiques géométriques, mécaniques, hydrauliques et des performances de filtration relative aux tissus métalliques en séparations solide-liquide et solide-gaz".
Rapport interne Gantois.

ANNEXES

Annexe I

Formulation du terme source des composantes
de la vitesse en coordonnées curvilignes

Dans l'équation III.8, l'expression du terme source pour la composante de la vitesse suivant l'axe curviligne η_i est la suivante :

$$\begin{aligned}
 S_{U^i} = & -\frac{1}{h_i} \frac{\partial p}{\partial \eta_i} + F^i + \sum_{\substack{j \neq i \\ k \neq i \\ k \neq j}} \left\{ -\frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial \eta_j} (h_i h_k \lambda_{U^i}^d U^i H_{i(j)}) \right. \\
 & + \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial \eta_j} \left(\frac{h}{h_j} \lambda_{U^i}^d \left[\frac{1}{h_i} \frac{\partial U^j}{\partial \eta_i} - U^j H_{j(i)} \right] \right) \\
 & + \lambda_{U^i}^c H_{j(i)} \left(U^{j^2} - 2 \frac{\lambda_{U^i}^d}{\lambda_{U^i}^c} \left[\frac{1}{h_j} \frac{\partial U^j}{\partial \eta_j} + U^k H_{j(k)} \right] \right) \\
 & + \lambda_{U^i}^d H_{i(j)} \left(\frac{1}{h_j} \frac{\partial U^i}{\partial \eta_j} + \frac{1}{h_i} \frac{\partial U^j}{\partial \eta_i} - U^j H_{j(i)} \right) \\
 & - \lambda_{U^i}^d (H_{i(j)}^2 + 2 H_{j(i)}^2) U^i \\
 & \left. + \lambda_{U^i}^c U^j H_{i(j)} U^i \right\}
 \end{aligned}$$

Annexe II

Discrétisation des équations

AII.1 Principe

La discrétisation des équations de transport est directement inspirée de la méthode développée par Pope /III.8/ et Gosman /III.9/. Chacune des équations de transport est intégrée dans son volume de contrôle associé.

Nous avons vu au chapitre III que les équations de transport dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales s'écrivent comme la somme, d'un terme de variation temporelle (1), de convection (2), de diffusion (3) et de source (4) :

$$h \frac{\partial}{\partial t} (\lambda_{\phi}^c \rho \phi) + \frac{\partial}{\partial \eta_i} \left[\frac{h}{h_i} (\lambda_{\phi}^c \rho U^i \phi - \lambda_{\phi}^d \frac{\partial \phi}{h_i \partial \eta_i}) \right] = h S_{\phi} \quad (1)$$

(1)
(2)
(3)
(4)

AII.2 Intégration de l'opérateur divergence

Soit V_p un volume de contrôle du maillage et $F_{i\alpha}$ ses six faces. L'intégration de l'opérateur divergence sur le volume se transforme en six intégrales sur les faces :

$$\int_{V_p} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial \eta_i} ()^i dv = \sum_{i\alpha} \alpha \int_{F_{i\alpha}} ()^i ds \quad (2)$$

AII.3 Terme de diffusion

Il provient du troisième terme de l'équation (1), et s'écrit :

$$D = \sum_{i\alpha} \alpha \int_{F_{i\alpha}} \left(\lambda_{\phi} \frac{\partial \phi}{h_i \partial \eta_i} \right) ds \quad (3)$$

En intégrant à l'aide du théorème de la moyenne, et en développant l'opérateur dérivé à l'ordre deux centré, nous obtenons :

$$D = \sum_{i\alpha} (\phi_{i\alpha\alpha} - \phi_p) D_{i\alpha} \quad (4)$$

avec
$$D_{i\alpha} = \frac{\lambda_{\phi}^d s_{i\alpha}^i}{Sl_{i\alpha}^i} \quad (5)$$

AII.4 Terme de convection

Issu du second terme de l'équation (1), il s'écrit :

$$D = \sum_{i\alpha} \alpha \int_{F_{i\alpha}} \left(\lambda_{\phi}^d \rho U^i \phi \right) ds \quad (6)$$

L'intégration par le théorème de la moyenne donne :

$$C = \sum_{i\alpha} \alpha (q^i \phi)_{i\alpha} \quad (7)$$

où q^i représente le débit convecté de la variable ϕ .

Il s'exprime :

$$q^i = (\lambda_{\phi}^c \rho U^i s^i)_{i\alpha} \quad (8)$$

Pour l'interpolation nécessaire à la linéarisation de l'expression (7), nous employons un schéma hybride centré-décentré amont suivant le nombre de Péclet:

- si $Pe < 2$, alors nous utilisons le schéma centré suivant :

$$C_{i-} + C_{i+} = \frac{1}{2} (\phi_{i--} + \phi_p) q^i - \frac{1}{2} (\phi_p + \phi_{i++}) q_{i+} \quad (9)$$

- si $Pe > 2$, c'est le schéma décentré amont qui est utilisé :

$$C_{i\alpha} = \alpha \left(\frac{1}{2} \phi_{i\alpha\alpha} (q_{i\alpha} - |q_{i\alpha}|) + \frac{1}{2} \phi_p (q_{i\alpha} + |q_{i\alpha}|) \right) \quad (10)$$

Finalement, le terme convectif s'écrit sous la forme d'une double somme, où la seconde représente le surplus lié au défaut de masse dans la maille considérée :

$$C = \sum_{i\alpha} \frac{1}{2} (q_{i\alpha} - |q_{i\alpha}|) (\phi_{i\alpha\alpha} - \phi_p) + \phi_p \sum_{i\alpha} q_{i\alpha} \quad (11)$$

AII.5 Terme source et termes spéciaux

L'intégration des termes sources s'obtient par l'utilisation des opérateurs d'interpolation, de dérivation et d'intégration décrits au paragraphe 6 du chapitre III.

Annexe III

Discrétisation des conditions aux limites et des obstacles internes

Pour un problème donné, les conditions aux limites (C.L.) et les obstacles internes (I.O.), sont définis par des régions surfaciques (cf. III.4.5) auxquelles sont associés des modèles de comportements physiques. Ces modèles sont choisis parmi la panoplie fournie au paragraphe III.7.3. A partir de ces données, pour chaque variable du problème, on construit les régions de traitements particuliers (cf. III.4.6).

Les traitements particuliers se distinguent selon :

- qu'ils interviennent lors, de l'initialisation, des itérations, de la finition ou de plusieurs de ces étapes,
- leur zone d'application : aux facettes à la limite, aux facettes internes ou à toutes les facettes de la grille scalaire,
- la configuration topologique à laquelle ils sont associés : simple, hybride à un modèle, hybride à deux modèles, tranche.

Dans le système linéaire du paragraphe III.7, il s'agit de modifier l'expression des coefficients associés aux volumes de contrôle des régions de ces traitements particuliers.

AIII.1 SITUATIONS TOPOLOGIQUES SIMPLES

Nous commençons par détailler les traitements simples généraux qui interviennent dans la modélisation de plusieurs types de C.L. et/ou d'O.I.. Ensuite, nous exposons, pour chacun des modèles de la panoplie, la manière par laquelle il est mis en oeuvre dans les situations topologiques simples.

AIII.1.1 Traitements généraux

Ils modélisent des comportements qui interviennent dans plusieurs modèles de traitement.

a - Neuman homogène

Pour une variable quelconque ϕ , cette condition qui traduit que la dérivée normale à la facette est nulle, s'exprime simplement par :

$$A_{i\alpha} = 0 \quad (1)$$

La valeur de $\phi_{i\alpha}$, utile pour l'exploitation des résultats, est calculée par extrapolation.

b - Neuman homogène

Soit $\varphi_{i\alpha}$ le flux d'une variable ϕ , imposée sur une facette à la limite. On peut écrire :

$$\varphi_{i\alpha} \approx \alpha \frac{\phi_{i\alpha} - \phi_p}{\delta l_{i\alpha}^i} \quad (2)$$

En pratique, à l'aide de cette relation et des valeurs de ϕ calculées à l'itération précédente, on calcule la valeur limite sous-relaxée $\phi_{i\alpha}$. Les coefficients du système linéaire ne sont pas modifiés.

L'utilisation de cette méthode pour les conditions de Neuman homogènes, pénaliserait la convergence en imposant une valeur à la limite flottante alors que ce n'est pas indispensable.

c - Dirichlet

Cette condition n'est accessible qu'aux facettes à la limite du domaine. Il suffit dans ce cas d'initialiser correctement les valeurs aux noeuds à la limite. Pour les composantes de la vitesse, nous rappelons qu'elles doivent être projetées dans le repère curviligne.

d - Lois de couches limites hydrauliques

Nous ne nous intéressons ici, qu'aux composantes tangentielles de la vitesse et aux variables k et ε . Leurs profils, ne pouvant être approchés linéairement, c'est

la loi logarithmique pseudo-universelle qui est utilisée. La discrétisation de ce modèle, est tirée de la formulation donnée au paragraphe II.4.3.

d.1- Composantes tangentielles de la vitesse

d.1.1 - Paroi fixe

Nous exprimons que l'apport en quantité de mouvement est nul suivant les directions tangentielles, par :

$$A_{i\alpha} = 0 \quad (3)$$

Mais ce faisant, nous éliminons la contribution du frottement sur la facette. Nous le réintroduisons donc dans le pivot par l'intermédiaire du terme spécial S_p , dont la formulation est issue de (II.39) et (II.40). Selon que le noeud est dans la sous-couche visqueuse, ou la couche logarithmique, S_p s'écrit :

$$\text{si } \delta l_{i\alpha}^i / 2 < \lambda \delta_0$$

$$S_p = \frac{\rho_{i\alpha} v_{i\alpha}}{\delta l_{i\alpha}^i / 2} s_{i\alpha} \quad (4)$$

$$\text{si } \delta l_{i\alpha}^i / 2 > \lambda \delta_0 ,$$

$$S_p = K C_\mu^{1/4} \frac{k_p^{1/2}}{\ln(e_1 y_p / \delta_0)} s_{i\alpha} \quad (5)$$

d.1.2 - Paroi défilante

De telles parois ne sont admises qu'aux limites du domaine. Pour les prendre en compte, il faut que les composantes tangentielles de la vitesse à la limite soient initialisées :

$$U_{i\alpha}^j = U_{\text{paroi}}^j$$

Dans ce cas, la quantité de mouvement tangentielle apportée par le défilement de la paroi peut être directement intégrée au coefficient associé à la facette :

si $\delta l_{i\alpha}^i / 2 < \lambda \delta_0$,

$$A_{i\alpha} = \frac{\rho_{i\alpha} V_{i\alpha}}{\delta l_{i\alpha}^i / 2} s_{i\alpha} \quad (6)$$

si $\delta l_{i\alpha}^i / 2 > \lambda \delta_0$,

$$A_{i\alpha} = K C_\mu^{1/4} \frac{k^{1/2}}{\ln(e_1 y_p / \delta_0)} s_{i\alpha} \quad (7)$$

d.2 - Variable k

La conservation de l'énergie dans le domaine étudié, conduit à imposer une dérivée normale de k nulle sur toute l'enveloppe du domaine. Pour les parois, cette condition générale de Neuman homogène est assortie de la modification des termes de production et destruction, donnés par les expressions (II.41) et (II.42).

Finalement, leur discrétisation s'écrit :

$$S_p = \frac{C_\mu^{3/4}}{k \delta l_{i\alpha}^i / 2} \ln(\lambda y_{p+}) k_p^{1/2} s_{i\alpha} \quad (8)$$

Pour une paroi fixe :

$$SU = \frac{|\vec{U}_p \cdot \vec{\tau}_p|}{\delta l_{i\alpha}^i / 2} s_{i\alpha} \quad (9)$$

Pour une paroi défilante :

$$SU = \frac{|(\vec{U}_p - \vec{U}_{i\alpha}) \cdot \vec{\tau}_p|}{\delta l_{i\alpha}^i / 2} s_{i\alpha} \quad (10)$$

d.3 - Variable ϵ

Le taux de dissipation de l'énergie de la turbulence, dont la formulation est explicite à proximité d'une paroi, est obtenu de l'expression II.43.

$$\forall i\alpha, A_{i\alpha} = 0$$

$$SU = 1.$$

$$S_p = \frac{C\mu^{3/4} k_p^{3/2}}{k \delta_{i\alpha}^{1/2}} \quad (11)$$

d.4 - Forttement pariétal $\vec{\tau}$

Les composantes du frottement pariétal, sont utiles pour le calcul des expressions (9) et (10). Leur évaluation, faite aux noeuds de vitesse, s'obtient de façon évidente de (II.39) ou (II.40).

d.5 - Epaisseur de la sous-couche visqueuse δ_o

$$\delta_o = \frac{v_{i\alpha}}{C\mu^{1/4} k_{i\alpha}^{1/2}} \quad (12)$$

AIII.1.2 Traitements simples des modèles de C.L. et O.I.

a - Frottements nuls sans flux

Ils se traduisent par :

- une condition de Dirichlet pour la composante normale de la vitesse,
- des conditions de Neuman pour toutes les autres variables hydrauliques.

b - Direction de la vitesse imposée

Après avoir initialisé toutes les valeurs données des vitesses à la limite, on fait un bilan des flux de matières traversant l'enveloppe du domaine de calcul. Pour obtenir le débit D on calcule alors la surface efficace S de la région donnée, vue de la direction que l'on veut imposer à la vitesse. La norme de la vitesse est alors déterminée par :

$$U = \frac{D}{S}$$

Cette valeur, est ensuite utilisée comme une condition de Dirichlet pour la région considérée.

c - Paroi à la limite

Pour la composante normale à la paroi, nous utilisons une condition de Dirichlet. Elle est nulle pour les parois étanches. l'adhérence à la paroi est exprimée par la loi de couches limites.

d - Paroi interne (ou tissu étanche)

Pour la composante normale de la vitesse, nous imposons qu'elle soit nulle de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \forall i\alpha, \quad A_{i\alpha} &= 0 \\ S_p &= 1 \\ SU &= 0 \end{aligned}$$

Il faut de plus exprimer, que la vitesse aux noeuds considérés est immuable malgré une correction de pression. Ceci est réalisé en annulant localement le coefficient de correction de cette composante.

Les autres variables hydrauliques sont régies par deux lois de couches limites de part et d'autre de la paroi.

e - Tissu perméable (O.I.)

La composante normale de la vitesse, est liée à la composante normale du gradient de pression par la loi de porosité (cf. II.6). Cette formulation explicite est traitée comme suit :

$$\begin{aligned} \forall i\alpha, \quad A_{i\alpha} &= 0 \\ S_p &= 1 \\ SU &= -\sqrt{\frac{2}{\xi_p \rho_p |\delta_{pp}|}} \delta_{pp} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \delta_{pp} &= p_{i+} - p_{i-} \\ \xi_p &= A / Re_p^* + B \end{aligned}$$

$$Re_p^* = \frac{U^i L}{\nu_p}$$

où A, B et L sont trois paramètres liés à la nature du tissu.

Par ailleurs, le coefficient de correction peut être estimé par :

$$PU^i = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\xi_p \rho_p |\delta_{pp}|}}$$

Les autres variables hydrauliques, sont régies par deux lois de couches limites de part et d'autre du tissu.

AIII.1.3 Traitements simples des C.L. thermiques

a - Paroi étanche à température imposée (C.L.)

On commence par initialiser la valeur de la température aux noeuds de la région surfacique.

Pour le calcul itératif, les coefficients du système linéaire correspondant aux facettes, sont calculées à l'aide du modèle exposé au paragraphe II.5 :

$$T_{i\alpha} = T_{\text{paroi}}$$

$$A_{i\alpha} = h(\delta l_{i\alpha}^i / 2) s_{i\alpha}$$

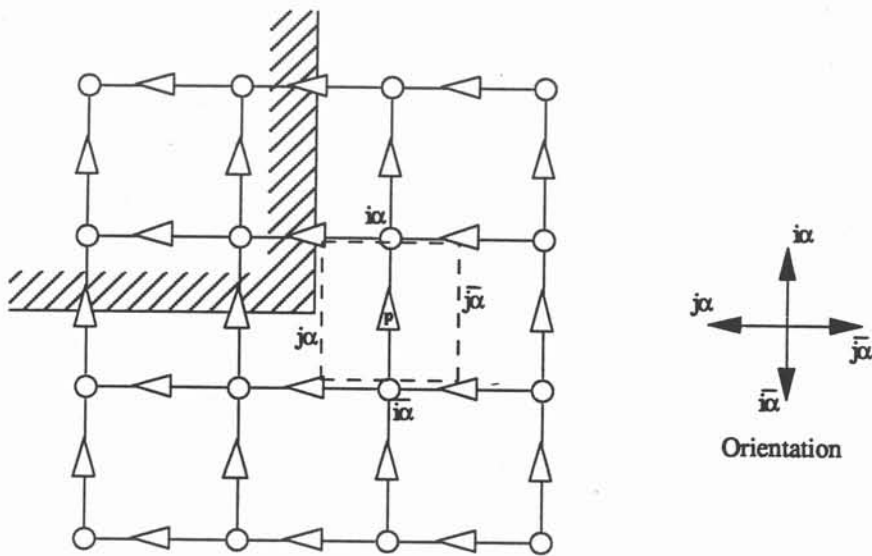
b - Paroi poreuse à température imposée

La procédure d'initialisation est la même que précédemment. Pour le calcul itératif, il faut de plus, prendre en compte qu'une certaine quantité de chaleur peut être prélevée ou apportée par l'écoulement au travers de la paroi.

$$T_{i\alpha} = T_{\text{paroi}}$$

$$D_{i\alpha} = h(\delta l_{i\alpha}^i / 2) s_{i\alpha}$$

$$C_{i\alpha} = \rho_{i\alpha} U_{i\alpha}^i s_{i\alpha}$$



- Figure AIII.1 -
Configuration hybride à un modèle.

$$A_{i\alpha} = C_{i\alpha} - D_{i\alpha}$$

c - Paroi étanche avec coefficient d'échange thermique

Au début du calcul, les valeurs de la température aux noeuds à la limite sont initialisées à la valeur de la température extérieure :

$$T_{i\alpha} = T_{ext}$$

Au cours des itérations, les coefficients du système linéaire se calculent par :

$$A_{i\alpha} = \frac{S_{i\alpha}}{1/h(\delta l_{i\alpha}^i/2) + 1/h_{ext}}$$

En fin de calcul, les valeurs de la température aux noeuds de la limite sont mises à la température de surface de la paroi.

$$A_{i\alpha} = T_p - \frac{T_p - T_{ext}}{1+h(\delta l_{i\alpha}^i/2)/h_{ext}}$$

AIII.2 SITUATIONS TOPOLOGIQUES HYBRIDES

Les situations topologiques hybrides ne concernent que les composantes de la vitesse (cf. III.4.6) au voisinage des contours des régions.

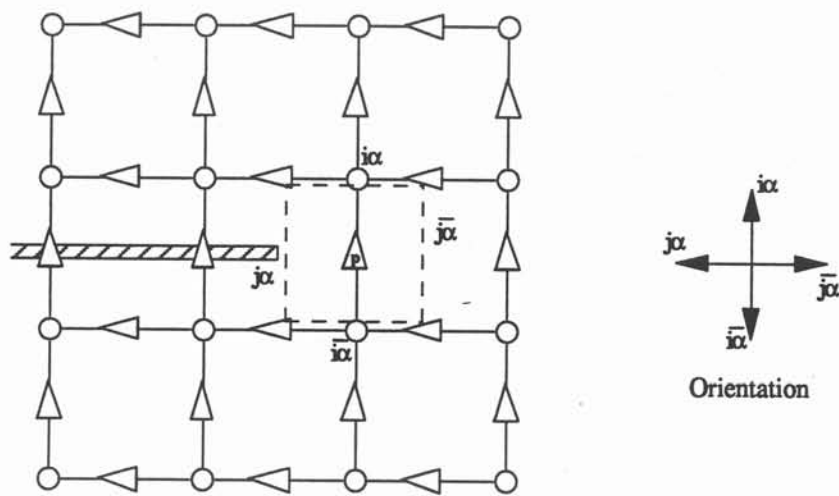
AIII.2.1 Hybrides à un modèle

a - Demi-facette

Cette situation apparaît à l'extrémité des parois internes. Il s'agit de traduire que la facette du volume est à moitié en contact avec un obstacle interne, l'autre moitié étant dans le domaine liquide (figure AIII.1).

Dans ce cas, les deux demi-facettes sont traitées séparément.

Pour la partie en contact avec l'obstacle, la loi de couche limite s'exprime alors par :



- Figure AIII.2 -
Configuration tranche.

$$S_p = \frac{\rho_p C_\mu^{1/4} k_{i\alpha}^{1/2}}{\ln(e_1 y_p / \delta_o)} \times \frac{S_{i\alpha}}{2}$$

Selon le modèle d'écoulement perpendiculaire à la paroi traitée, la convection de quantité de mouvement par la demi-facette, est estimée par :

$$\text{- si } \delta l_{i\alpha}^i / 2 > \lambda \delta_o^j \quad (\text{régime turbulent})$$

le profil de vitesse est supposé plat pour obtenir :

$$q_{i\alpha}^i = \rho_{i\alpha} U_{i\alpha j\alpha}^i$$

$$\text{- si } \delta l_{i\alpha}^j / 2 < \lambda \delta_o^j \quad (\text{régime laminaire})$$

le profil de vitesse est supposé linéaire pour obtenir :

$$q_{i\alpha}^i = \rho_{i\alpha} U_{i\alpha j\alpha}^i / 2$$

La vitesse transportée par cette quantité de mouvement est obtenue par interpolation au centre de la demi-facette :

$$U_{\text{centre facette}}^i = U_{i\alpha j\alpha/2}^i$$

Ce terme de convection est intégré au terme source qui s'exprime :

$$SU = q_{i\alpha j\alpha/2}^i \frac{S_{i\alpha}}{2}$$

De même, la diffusion par cette demi-facette est intégrée au terme source :

$$SU = - \rho_{i\alpha} v_{i\alpha} \frac{1}{4} [(3 U_p^j + U_{j\alpha\alpha}^j) - (3 U_{i\alpha\alpha}^j + U_{i\alpha j\alpha\alpha}^j)] \frac{S_{i\alpha}}{2}$$

b - Tranche

Dans ce cas, pour un volume de contrôle associé à une composante de la vitesse, la facette considérée est en contact avec la tranche d'une facette obstacle (figure AIII.2). De tels obstacles, modélisent la présence de parois infiniment

minces à l'échelle du maillage. Il s'agit alors d'exprimer que le liquide adhère à la mince surface de la tranche, ce qui se traduit par une vitesse nulle sur le segment correspondant à la tranche.

Pour traiter ce cas, à chacune des deux demi-facettes, on applique le même traitement que pour la partie libre du cas précédent.

AIII.2.2 Hybrides à deux modèles

Cette situation apparaît à proximité des frontières communes à deux régions de la limite du domaine de calcul.

a - Demi-facette à frottement nul

Dans une telle configuration, quel que soit le type de condition appliquée sur l'autre demi-facette associée, le coefficient correspondant du système linéaire est modifié par :

$$A_{i\alpha} = A_{i\alpha} - A_{i\alpha}/2 = A_{i\alpha}/2$$

b - Paroi-Dirichlet

Lorsque sur une facette, cohabitent une loi de paroi et une condition de Dirichlet, on fait un traitement identique à celui exposé pour les situations topologiques hybrides à un modèle (cf AIII.2).

Thèse de Doctorat

Titre de l'ouvrage :

MODELISATION NUMERIQUE DE LA THERMOHYDRAULIQUE D'UNE COULEE SEMI-CONTINUE DE PLAQUES D'ALUMINIUM

Nom de l'auteur :

Christian RAFFOURT

Etablissement :

Institut National Polytechnique de Grenoble

RESUME

La coulée semi-continue des plaques d'aluminium est un procédé opérationnel mais non optimum. Pour mieux maîtriser les phénomènes thermohydrauliques, nous nous intéressons principalement au système d'injection en écartant les problèmes de solidification. Nous présentons un code de calcul permettant de prédire par la méthode des volumes finis, les écoulements turbulents en présence de convection naturelle et d'obstacles internes étanches ou poreux.

Les résultats des calculs sont confrontés aux mesures réalisées sur une coulée en grandeurs réelles et permettent de juger de l'importance de certains paramètres ainsi que de l'efficacité de quelques types d'injecteurs.

Afin de modéliser la présence de paniers en tissus poreux, nous avons réalisé des mesures de pertes de charge de débits d'aluminium liquide au travers de différents tissus.

MOTS CLES

Coulée semi-continue ; Modélisation numérique ; Volumes finis ; Thermohydraulique ; Turbulence ; Couches limites ; Porosité ; Convection naturelle.

